

ACTA PHYSICA AUSTRIACA

UNTER MITWIRKUNG DER

ÖSTERREICHISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

HERAUSGEGEBEN VON

K. W. FRITZ KOHLRAUSCH UND HANS THIRRING

GRAZ

WIEN

SCHRIFTLEITUNG

PAUL URBAN

GRAZ

6. BAND, 4. (SCHLUSS-)HEFT

MIT 9 ABBILDUNGEN

(AUSGEGEBEN IM JANUAR 1953)



WIEN

SPRINGER-VERLAG

1953

Richtlinien für die Abfassung von Beiträgen.

Allgemeines. Die Arbeit soll klar und verständlich geschrieben sein. Es ist Rücksicht auf jene Leser zu nehmen, die nicht gerade an demselben Problem arbeiten. Auch ohne übermäßige und nicht verantwortbare Breite der Darstellung kann häufig ein eingefügter kleiner Satz dem Leser eine Stunde Nachdenken ersparen. Jede Niederschrift ist ein Ringen um das richtige Wort an der richtigen Stelle. Nur den wenigsten ist es gegeben, auf den ersten Anhieb schon das Optimum an Aufbau, Gliederung und Ausdruck zu erreichen. Meist wird dies erst nach mehrfachem Umarbeiten gelingen. Diese Mühe muß der Autor auf sich nehmen. Erstens schon in seinem eigensten Interesse, um nicht monatelange Arbeit durch unzweckmäßige Darstellung der Ergebnisse zu entwerfen; zweitens im Interesse der Drucklegung, da nachträgliche stilistische Verbesserungen und Veränderungen so viel Mehrarbeit für den Setzer bedeuten, daß sie, selbst wenn die Kosten dem Autor angerechnet werden, bei den heutigen Verhältnissen als untragbar bezeichnet werden müssen. Eben diese Verhältnisse machen es den Herausgebern zur unabweislichen Pflicht, Abhandlungen, die nach ihrem Dafürhalten den üblicherweise zu stellenden Anforderungen in dieser Hinsicht nicht voll entsprechen, zur Umarbeitung zurückzusenden.

Manuskripte sind entweder an die Schriftleitung der „Acta Physica Austriaca“, Prof. Dr. PAUL URBAN, Graz, Universitätsplatz 5 oder an den Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5, zu richten.

Umfang: Obere Grenze etwa ein Druckbogen; längere Abhandlungen sind zu unterteilen.

Äußere Form: Maschinenschrift; einseitig beschriebene, fortlaufend bezifferte Blätter; linksseitig mit breitem freiem Rand.

Titelkopf: Titel der Arbeit (soll bereits unmißverständlich kennzeichnend für den behandelten Gegenstand sein). Darunter der Name des Verfassers mit ausgeschriebenen Vornamen. Darunter Angabe des Institutes, aus dem die Arbeit stammt, oder Privatanschrift des Verfassers; darunter „Mit ... Abbildungen.“

Inhaltsübersicht: Der Abhandlung vorangestellt wird eine zusammenfassende Inhaltsübersicht in Kleindruck. Sie dient als einführender erster Überblick für den Leser und als Vorlage für die Referenten der Referatenblätter. Die Übersicht soll trotz gedrängter Darstellung alles enthalten, was der Verfasser an seiner Arbeit in bezug auf Problemstellung, Methodik und Ergebnisse für unerläßlich zu ihrer Beurteilung hält. Zu einer Beurteilung auch durch den Nichtfachmann!

Abbildungen: Sie müssen, wenn auch nur skizziert, doch so weit ausgeführt sein, daß für den dem Thema fernstehenden Verlagszeichner keine Unklarheiten bestehen. Jede Zeichnung ist zu beschriften; die Beschriftung soll das Lesen der Zeichnung auch ohne langes Suchen im Text ermöglichen. Sie ist, als Beschriftung der Abb. Nr. ... kenntlich gemacht, an der gewünschten Stelle des Textes einzufügen. Die Zeichenvorlage ist der Abhandlung auf gesondertem Blatt, das zwecks Vermeidung von lästigen Verwechslungen durch Autorennamen und Arbeitstitel gekennzeichnet sein soll, beizulegen. Man vergesse nicht, daß Figurenwiedergabe und Textherstellung zwei gesonderte Arbeitsgänge sind, die erst nach der ersten Korrektur zusammenlaufen.

Fortsetzung auf der III. Umschlagseite

6. Band/4. Heft.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Hittmair, O. Zur Kernspinbestimmung durch inelastische Streuung . . .	241
Überall, H. Der Wirkungsquerschnitt der Proton-Proton-Streuung bei kleinen Energien	246
Krzywoblocki, M. Z. On the Fundamentals of Locally Isotropic Turbulence In Magneto-Hydrodynamics of a Compressible Medium	250
Ledinegg, E. und P. Urban. Über die Nullpunktssuszeptibilität einer linearen antiferromagnetischen Atomkette	257
Herrmann, J. und Th. Sexl. Zur quantitativen Theorie der radioaktiven α -Emission	288
Bergmann, O. Zur Optik in der verallgemeinerten Feldtheorie	306
Leimanis, E. Über die Bewegung eines Massenpunktes in einem widerstehenden Mittel veränderlicher Dichte	319
Porod, G. Zur Thermodynamik der Phasenumwandlungen I. Heterobare Phasenübergänge in Einstoffsystemen	322
Sexl, Th. Eine Differentialgleichung für die FERMIschen Streulängen bei der Streuung Neutron-Proton (Kurze Mitt.)	329
Smekal, A. Bericht über die Jahrestagung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. bis 4. Oktober 1952 in Wien	332
Buchbesprechungen	335

Zur Kernspinbestimmung durch inelastische Streuung.

Von

O. Hittmair

Physics Department, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

(Eingelangt am 24. März 1952.)

Es wird die Spinabhängigkeit der Winkelverteilung bei inelastischer Streuung und bei dem allgemeineren Prozeß $X_1(a_1, a_2) X_2$ dargelegt. Unter Verwendung der Streumatrix S und der RACA-Koeffizienten ergibt sich ein verhältnismäßig einfacher Ausdruck. Der besondere Fall einer Reaktion, in der X_1 und X_2 den Spin Null haben, wird behandelt. Hier ist durch rein gruppentheoretische Methoden eine eindeutige Spinbestimmung der Compoundniveaus möglich. Die Winkelverteilung für die Compoundniveaus vom Spin $1/2$ bis $9/2$ wird angegeben. Vorausgesetzt ist dabei, daß a_1 und a_2 den Spin $1/2$ haben.

Die Spinabhängigkeit der Winkelverteilung.

Eine Partikel a_1 trifft einen Kern X_1 . Dies leitet eine Kernreaktion ein, in deren Verlauf eine Partikel a_2 ausgesandt wird. Ein Kern X_2 bleibt zurück. Bei a_1 und a_2 kann es sich natürlich auch um γ -Quanten handeln. Der Vorgang sei eine Reaktion im eigentlichen Sinne des Wortes, das heißt X_1 ist verschieden von X_2 . Als verschieden werden aber auch Kerne gleicher Art betrachtet, die sich im selben Energieniveau befinden, aber verschiedene Spinrichtung aufweisen. Das Schema beschreibt den Vorgang der inelastischen Streuung, wenn es sich bei a_1 und a_2 um Partikel gleicher Art handelt.

a_1 hat im Schwerpunktsystem den Gesamtdrehimpuls L_1 , der sich durch vektorielle Addition von Partikelspin und Bahndrehimpuls ergibt. a_2 hat den Drehimpuls L_2 . Die z -Achse des Koordinatensystems werde in Richtung der einfallenden Strahlung gelegt. L_1 hat dann die z -Komponente μ_1 und L_2 hat die z -Komponente M_2 . Die Komponente μ_1 rührt vom Spin der Partikel her, da der Bahndrehimpuls auf der z -Achse senkrecht steht und daher keinen Beitrag liefert. μ_1 ist also Null für α -Strahlung, ± 1 für γ -Strahlung, $\pm 1/2$ für Protonen und Neutronen usw.

Der Kern X_1 sei schwer genug, daß er im Schwerpunktsystem als ruhend angesehen werden kann. Sein Spin ist i_1 . Der Spin von X_2 ist i_2 . a_1 und X_1 vereinigen sich zum Zwischenzustand eines Compound-

kernes mit dem Spin i_c , der dann in X_2 und a_2 auseinanderbricht. Der Erhaltungssatz des Drehimpulses liefert die Vektorgleichungen

$$\vec{L}_1 + \vec{i}_1 = \vec{i}_c, \quad (1a)$$

$$\vec{L}_2 + \vec{i}_2 = \vec{i}_c. \quad (1b)$$

Für die z -Komponenten gilt

$$\mu_1 + m_1 = m_c, \quad (2a)$$

$$M_2 + m_2 = m_c. \quad (2b)$$

Die Transformationsamplitude für den ins Auge gefaßten Übergang sei mit $f_{a_2 L_2 M_2, a_1 L_1 \mu_1}(\vartheta)$ bezeichnet. a_1 bezeichnet die Quantenzahlen von a_1 und X_1 , die nicht Spin oder Bahndrehimpuls betreffen. Das Analoge gilt für a_2 . ϑ ist der Winkel, den die ausgehende Strahlung mit der z -Achse einschließt. Die relative Wahrscheinlichkeit für diesen Übergang beträgt $|f_{a_2 L_2 M_2, a_1 L_1 \mu_1}(\vartheta)|^2$.

Die Abhängigkeit von $f_{a_2 L_2 M_2, a_1 L_1 \mu_1}(\vartheta)$ von den magnetischen Quantenzahlen und seine Beziehung zur Streumatrix S werden mit Hilfe der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten gegeben:

$$\begin{aligned} & f_{a_2 L_2 M_2, a_1 L_1 \mu_1}(\vartheta) = \\ & = \sum_{i_c m_c} (i_1 L_1 m_1 \mu_1 | i_c m_c) (i_2 L_2 m_2 M_2 | i_c m_c) S_{a_2 L_2, a_1 L_1}^{(i_c)} D_{M_2 \mu_2}^{(L_2)}(0 \vartheta 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Es ist hier über die Spins und m -Zahlen aller Niveaus des Compoundkernes zu summieren, die in Frage kommen für den bezeichneten Übergang. $D^{(L_2)}$ ist eine Darstellungsfunktion der dreidimensionalen Drehgruppe. Sie enthält den Winkel ϑ , den die ausgehende Strahlung mit der z -Achse einschließt. Würde man die z -Achse in Richtung des ausgehenden Strahles wählen, wäre μ_2 die z -Komponente von L_2 .

Was man wirklich beobachtet, ist die Winkelverteilung $W(\vartheta)$, die sich für unpolarisierte Strahlungen als

$$W(\vartheta) = \sum_{L_1 L_2 \mu_1 M_2} |f_{a_2 L_2 M_2, a_1 L_1 \mu_1}(\vartheta)|^2 \quad (4)$$

ergibt. Dabei sind auch L -Zahlen, die sich bei gleichem Betrag durch verschiedene Zusammensetzung von Spin und Bahndrehimpuls ergeben, als verschieden zu werten. Konstante Faktoren werden weggelassen. So erhält man schließlich

$$\begin{aligned} W(\vartheta) = & \sum_{i_c i_c'} \sum_{LL' MM\mu} (i_1 L_1 m_1 \mu_1 | i_c m_c) (i_1 L_1' m_1 \mu_1' | i_c' m_c') \\ & \times (i_2 L_2 m_2 M_2 | i_c m_c) (i_2 L_2' m_2 M_2' | i_c' m_c') \\ & \times S_{a_2 L_2, a_1 L_1}^{(i_c)*} S_{a_2 L_2', a_1 L_1'}^{(i_c')} D_{M_2 \mu_2}^{(L_2)*} D_{M_2' \mu_2'}^{(L_2')}. \end{aligned} \quad (5)$$

Das Produkt der Darstellungsfunktionen $D^{(L_2)*} D^{(L_2')}$ läßt sich ausreduzieren und die m -Summen über die Produkte der CLEBSCH-GORDAN-Koeffizienten lassen sich durch RACA-Koeffizienten ausdrücken¹. Das Ergebnis ist

$$W(\vartheta) = \sum_{i_c i_c' L L' \nu} W(i_c L_1 i_c' L_1', i_1 \nu) W(i_c L_2 i_c' L_2', i_2 \nu) (-)^{L_1' + L_2' - \nu} \\ \times c_\nu(L_1 L_1') c_\nu(L_2 L_2') S_{\alpha_2 L_2, \alpha_1 L_1}^{(i_c)^*} S_{\alpha_2 L_2', \alpha_1 L_1'}^{(i_c')} P_\nu(\cos \vartheta) \quad (6)$$

mit

$$c_\nu(L L') = \sum_{\mu} (-)^{L-\mu} (L L' - \mu \mu | \nu 0). \quad (7)$$

Diese Formel beschreibt die Winkelverteilung der inelastischen Streuung in voller Allgemeinheit. Das Produkt der beiden S-Matrix-Elemente ist allerdings im allgemeinen nicht bekannt und man muß es als einen aus dem Experiment zu bestimmenden Parameter ansehen. Man weiß jedoch von der S-Matrix, daß sie symmetrisch und unitär sein muß. Das schränkt die Zahl der zu bestimmenden Parameter ein.

Der Fall $i_1 = i_2 = 0$.

Prinzipiell ist es nun möglich — insbesondere, wenn Spin und Parität von X_1 und X_2 bekannt sind —, den Spin um die Parität der beteiligten Niveaus des Compoundkernes zu bestimmen. Man hat einfach das rechte Schema zu wählen, das die beobachtete Winkelverteilungsfunktion $W(\vartheta)$ erklärt. Praktisch ist jedoch die Eindeutigkeit dieser Bestimmung von zweifelhaftem Charakter. Einerseits verleihen die aus dem Experiment zu bestimmenden Parameter dem Formalismus eine unerwünschte Elastizität und andererseits wird der Ausdruck ungeheuer kompliziert, wenn verschiedene Multipolmomente der vorkommenden Strahlungen wirksam sind und außerdem mehrere Niveaus des Compoundkernes angeregt sind. Dies ist auch für einen monochromatischen einfallenden Strahl möglich, wenn diese Niveaus genügend nahe beisammen liegen.

Es gibt jedoch Fälle, in denen alle diese Schwierigkeiten wegfallen. Wenn X_1 den Spin Null hat — und das ist z. B. der Fall für alle Kerne gerader Massen- und Ladungszahl im Grundzustand —, so ist zwischen einem bestimmten Niveau des Compoundkernes und X_1 nur ein wohlbestimmtes L_1 möglich. Es besteht die Beziehung

$$L_1 = i_c. \quad (8)$$

¹ G. RACA, Phys. Rev. **62**, 438 (1942) und **84**, 910 (1951); siehe auch J. M. BLATT and L. C. BIEDENHARN, vor Veröffentlichung in Rev. Mod. Phys.

Kehrt nun das System auch wieder in einen Kern X_2 mit Spin Null und eine Partikel a_2 zurück, so steht es fest, daß auch

$$L_2 = i_c \quad (9)$$

und somit

$$L_1 = L_2. \quad (10)$$

Voraussetzung ist, daß nur ein Niveau des Compoundkernes angeregt ist, das heißt der Niveauabstand muß groß genug sein. Unter diesen Umständen fällt nun die Summe über die verschiedenen L_1 - und L_2 -Werte fort. Das hat den besonderen Vorteil, daß auch das Quadrat $|S_{a_2 L_2, a_1 L_1}^{(i_c)}|^2$ als gemeinsamer Faktor weggelassen werden kann. Das eliminiert die letzte Unbestimmtheit in der Beschreibung des Vorgangs. Man erhält

$$W(\vartheta) = \sum_{v=0}^{2L} c_v (L L)^2 W(L L L L, 0_v)^2 P_v(\cos \vartheta) \quad (11)$$

mit $L = L_1 = L_2 = i_c$.

Die Koeffizienten $c_v (L L)$ verschwinden für ungerade v . Das entspricht der wohlbekannten Tatsache, daß bei inelastischer Streuung, die nur ein Compoundniveau enthält, nur gerade Potenzen von $\cos \vartheta$ auftreten.

Aus der Definition der RACA-Koeffizienten erkennt man, daß die hier vorkommenden Koeffizienten von v unabhängig sind. Man kann sie also als gemeinsame Faktoren streichen. Übrig bleibt

$$W(\vartheta) = \sum_v c_v (L L)^2 P_v(\cos \vartheta). \quad (12)$$

Die bei diesen Reaktionen beobachteten Winkelverteilungen $W(\vartheta)$ gestatten also, den Spin des Compoundniveaus eindeutig zu bestimmen. Keine der Unzulänglichkeiten eines Kernmodells kommt ins Spiel und das Ergebnis ergibt sich durch rein gruppentheoretische Überlegungen.

Realisierungen dieser Reaktionen sind alle inelastischen Streuungen an Kernen gerader Ladungs- und Massenzahl, bei denen der getroffene Kern im Grundzustand war und auch wieder in ihn zurückkehrt. Bedingung ist die Resonanz eines einzelnen Niveaus. Die Reaktion kann aber auch in einem angeregten Niveau enden, statt wieder in den Grundzustand zurück zu führen, wenn dieses den Spin Null hat. Ein Beispiel wäre $O^{16}(p, p') O_{6,05}^{16*} \text{ Mev}$. Dieser Vorgang würde zur Spinbestimmung von F^{17} -Niveaus dienen. Es sind aber auch Reaktionen zugelassen, bei denen a_1 und a_2 verschiedene Partikel darstellen. Dabei ist es jedoch eine notwendige Bedingung, daß ihre Spinsumme ganzzahlig ist. So könnte z. B. zur Bestimmung der B^{11} -Niveaus die Reaktion

$$B_c^{10}(p, n) B_{7,47}^{10*} \text{ Mev}$$

dienen.

Die ersten fünf Winkelverteilungen für Partikel mit Spin 1/2.

Zum Schluß seien noch die ersten fünf Winkelverteilungen für den Fall angegeben, daß es sich bei a_1 und a_2 um Teilchen mit Spin 1/2 handelt. Die Bahnimpulsquantenzahlen der Teilchen laufen also von $l = 0$ bis $l = 4$. $l = 0$ gibt $L = 1/2$ mit $\nu = 0$. Das heißt $W(\vartheta)$ ist isotrop. Man könnte meinen, daß für die selbe L -Zahl zwei l -Zahlen beitragen könnten durch $l + 1/2$ und $(l + 1) - 1/2$. Dies ist jedoch ausgeschlossen durch die definite Parität des Compoundniveaus.

$$L = 1/2, \quad W(\vartheta) \text{ isotrop,}$$

$$L = 3/2, \quad W(\vartheta) = 1 + P_2(\cos \vartheta),$$

$$L = 5/2, \quad W(\vartheta) = 1 + 1,14 P_2 + 0,857 P_4,$$

$$L = 7/2, \quad W(\vartheta) = 1 + 1,19 P_2 + 1,05 P_4 + 0,757 P_6,$$

$$L = 9/2, \quad W(\vartheta) = 1 + 1,21 P_2 + 1,13 P_4 + 0,960 P_6 + 0,685 P_8.$$

Der Autor möchte Dr. FALKOFF seinen Dank für wertvolle Diskussionen aussprechen.

Der Wirkungsquerschnitt der Proton-Proton-Streuung bei kleinen Energien.

Von

Herbert Überall, Wien.

(Eingelangt am 21. Mai 1952.)

Die Formel für den Wirkungsquerschnitt der anormalen Streuung am COULOMB-Feld wird durch Einführen der für kleine Energien geltenden Näherungsausdrücke für die Phasenverschiebung modifiziert.

Die anormale Proton-Protonstreuung stellt zwar ein streng lösbares Problem der Wellenmechanik dar, doch ist es wegen der ungenügend vorliegenden Tabellierung der auftretenden Funktionen und überhaupt wegen der komplizierten Gestalt derselben keinesfalls ratsam, die exakten Wellenfunktionen für numerische Diskussionen und Vergleiche mit Streuexperimenten heranzuziehen. Aus diesem Grund war es empfehlenswert, Näherungsformeln der Wellenfunktionen im Falle kleiner Energien der einfallenden Teilchen herzuleiten, welche eine zwar nicht bedeutend vereinfachte Form, aber immerhin den Vorteil aufweisen, daß sie aus gut tabellierten Funktionen bestehen. Dieses Problem wurde in mehreren Arbeiten behandelt, unter anderen von BREIT und BOURICIUS [1] und von H. ÜBERALL [2]; in letzterer wird die für kleine Energien, bzw. Wellenzahlen k der einfallenden Teilchen naheliegende TAYLOR-Entwicklung nach Potenzen von k durchgeführt und nach dem Glied mit k^2 abgebrochen. Aus den Übergangsbedingungen für $r = r_0$ (r_0 = Kernradius) ergibt sich ferner bei Zugrundelegung dieser Entwicklungen ein Zusammenhang zwischen k und der Phasenverschiebung δ_l , welche die auslaufende l -te Partialwelle gegenüber der bei der reinen COULOMB-Streuung auftretenden auslaufenden Welle erleidet, in der Form

$$m(k) \operatorname{ctg} \delta_l + h_l(k) = a_l + b_l k^2 + \dots \quad (1)$$

mit den Bezeichnungen

$$m(k) = \pi (e^{2\pi/a k} - 1)^{-1},$$

$$h_l(k) = \ln a k + \Re \Psi \left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right);$$

$a = \hbar^2/\mu Z Z'$ ist der BOHRsche Radius (μ = reduzierte Masse der einfallenden Teilchen); die Koeffizienten der Reihenentwicklung $a_l = -a_l^{-1}$, $b_l = c_l/2$ in der Bezeichnung der erwähnten Arbeit [2] sind Aggregate von verschiedenen BESSEL-Funktionen und hängen außer von l nur noch von a , ferner vom Kernradius r_0 und der Muldentiefe U des konstant angenommenen Innenpotentials ab (letztere Annahme ist keine willkürliche Beschränkung bei Energien, für welche die Reihe Gl. (1) nach dem Glied mit k^2 abgebrochen werden darf, wie in der obenwähnten Arbeit [2] gezeigt wurde). Die in Gl. (1) auftretenden Funktionen sind alle wohlbekannt; für $\Re \Psi((i/a k) + l + 1)$ findet sich z. B. eine graphische Darstellung in einer Arbeit von JACKSON und BLATT [3] oder eine Näherungsformel, die mittels der STIRLING-Reihe abgeleitet wurde, bei BREIT und HULL [4].

Die Arbeiten einiger anderer Autoren [5] liefern die Koeffizienten a_l , b_l der Reihe (1) in Form von Integraldarstellungen; in diesem Fall bietet die Reihenentwicklung dann eigentlich keine Vorteile mehr, da diese Integrale, ebenfalls Funktionen von r_0 und U , noch weniger tabelliert sind als die exakten Wellenfunktionen der Streuung.

Würde der Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (1) nicht in eine Potenzreihe entwickelt, so könnte die Phasenverschiebung δ_l nur durch die exakten Wellenfunktionen dargestellt werden und man erhielte dadurch einen kaum übersehbaren Verlauf der Abhängigkeit von r_0 und U . Die Phasenverschiebung δ_l kann bei verschiedenen Energien und bei einem konstanten Streuwinkel — etwa bei $\vartheta = 90^\circ$ im Relativkoordinatensystem, bei welchem die Partialwelle $l = 1$ verschwindet — aus den Experimenten ermittelt werden; es ergibt sich ein verhältnismäßig großer Geltungsbereich der nach k^2 abgebrochenen Reihenentwicklung, und zwar bis etwa 10 MeV und darüber, wie in einigen amerikanischen Arbeiten [6] gezeigt wird.

Was durch die Versuche direkt gemessen wird, ist der differentielle Wirkungsquerschnitt der anormalen COULOMB-Streuung; dieser lautet (vergl. etwa [7] oder [8])

$$\sigma(\vartheta) = |f(\vartheta)|^2 \quad (2)$$

mit

$$f(\vartheta) = f_c(\vartheta) + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} e^{i \left(2 \arg \Gamma \left(\frac{i}{a k} + l + 1 \right) + \delta_l \right)} \sin \delta_l P_l(\cos \vartheta), \quad (2a)$$

wo

$$f_c(\vartheta) = -\frac{1}{2 a k \sin^2 \vartheta/2} e^{-\frac{i}{a k} \ln \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + 2 i \arg \Gamma \left(\frac{i}{a k} + 1 \right)}$$

die Streuamplitude der reinen COULOMB-Streuwelle darstellt; die Phasenverschiebung tritt selbstverständlich nur in dem von den auslaufenden Partialwellen herrührenden Teil auf. Mit einmal bestimmten δ_l kann mittels Gl. (2) der Verlauf der Winkelabhängigkeit der Streuintensität verfolgt werden.

Da die Partialwellen bei wachsender Drallquantenzahl l rasch mit ihrer Intensität abnehmen, braucht man bei der numerischen Auswertung nur die ersten von ihnen beizubehalten. Läßt man etwa nur die Partialwellen $l = 0$ und $l = 1$ in der Streuformel, so hat man in ihr zwei durch die Experimente zu bestimmende Parameter δ_0 und δ_1 enthalten. Bei Beschränkung auf Energien kleiner 10 MeV hingegen kann man den Ausdruck (1) für die Phasenverschiebung einführen; das geschieht, indem man die in Gl. (2 a) auftretenden Funktionen von δ_l durch $\text{ctg } \delta_l$ ausdrückt, auf folgende Weise: man macht die Umformung

$$e^{i\vartheta_l} \sin \delta_l = \frac{\text{ctg } \delta_l + i}{1 + \text{ctg}^2 \delta_l}$$

und erhält dadurch für die anormale Streuamplitude

$$f(\vartheta) = f_c(\vartheta) + \frac{m}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{2i \arg \Gamma\left(\frac{i}{a k} + l + 1\right)} \frac{a_l + b_l k^2 - h_l + i m}{a_l^2 + 2 a_l b_l k^2 + g_l + m^2} P_l(\cos \vartheta) \quad (3)$$

mit

$$g_l = h_l [h_l - 2(a_l + b_l k^2)].$$

Dieser Ausdruck enthält jetzt nicht mehr die unbekannten Phasenverschiebungen δ_l , sondern hängt nur mehr von den zwei Parametern r_0 und U ab, ganz unabhängig davon, wieviele Partialwellen beibehalten werden. Das wäre natürlich auch der Fall gewesen, wenn für δ_l die exakten Formeln eingesetzt worden wären, denn alle δ_l hängen dann ebenfalls nur vom Kernradius und der Muldentiefe ab. Doch wie schon erwähnt, bedeutet dann die Annahme eines konstanten Innenpotentials eine willkürliche Einschränkung, und überdies nimmt ja die Abhängigkeit von r_0 und U in der Form der Gl. (1) eine viel einfachere Gestalt an als in der Darstellung durch die exakten Wellenfunktionen; eine weitere Vereinfachung wäre noch möglich durch Einsetzen der Reihenentwicklungen für die in den Koeffizienten auftretenden modifizierten BESSEL-Funktionen, die nach dem ersten oder zweiten Glied abgebrochen werden können, da ihr Argument $2\sqrt{2 r_0/a}$ (vergl. [2]) von der Größenordnung 10^{-2} ist.

Die Formel (3) enthält also ebensoviele Parameter wie die Formel (2 a) für den Fall, daß bereits die Partialwelle $l = 2$ weggelassen wurde; im Gegensatz dazu kann Gl. (3) eine beliebige Zahl von Partialwellen enthalten, je nachdem, wie weit man diese zur numerischen Diskussion beibehalten muß.

Zum Abschluß möchte ich Herrn Prof. TH. SEXL für die große Anteilnahme danken, die er dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Literatur.

- [1] G. BREIT u. W. G. BOURICIUS, Phys. Rev. **75**, 1029 (1949).
- [2] H. ÜBERALL, Acta Physica Austriaca, im Erscheinen.
- [3] J. D. JACKSON u. J. M. BLATT, Rev. Mod. Phys. **22**, 77 (1950).
- [4] G. BREIT u. M. H. HULL, Phys. Rev. **80**, 561 (1950).
- [5] G. F. CHEW u. M. L. GOLDBERGER, Phys. Rev. **75**, 1637 (1949). — J. M. BLATT u. J. D. JACKSON, Phys. Rev. **76**, 18 (1949). — H. A. BETHE, Phys. Rev. **76**, 38 (1949).
- [6] Die beiden letzteren unter [5] erwähnten Arbeiten.
- [7] TH. SEXL, Vorlesungen über Kernphysik, Wien, Fr. Deuticke, 1948, S. 102.
- [8] L. I. SCHIFF, Quantum Mechanics, New York, McGraw-Hill Book Company, 1949, S. 120.

On the Fundamentals of Locally Isotropic Turbulence In Magneto-Hydrodynamics of a Compressible Medium.

By

M. Z. Krzywoblocki, University of Illinois

(Received June 3, 1952.)

Introduction.

BATCHELOR and CHANDRASEKHAR [1] developed the invariant theory of isotropic turbulence in the magneto-hydrodynamics of an incompressible medium. In [4] the author extended this theory to the range of compressible media. In the present paper the author generalizes the notion of locally-isotropic turbulence to the magneto-hydrodynamics of compressible media. Principally, he extends his hypothesis of locally isotropic turbulence put forward in [3]. The theory allows for the interaction between the electromagnetic field and the turbulent motion when there is no externally imposed electric or magnetic field [1].

1. Basic Equations.

In the previous note [4] the author derived the following six fundamental equations for the propagation of (velocity, density, etc.) correlation functions:

$$\begin{aligned} & \overline{(\eta f)}_{,t} + 2 [\overline{(\eta h)}_{,r} + 4 r^{-1} \overline{(\eta h)}] + 2 K^{(2)} \\ & - (\varrho_0/\mu_0^{(1)}) (\varrho' \mu^{(1)} + \varrho \mu^{(1)'}) \{ (s_{4,r} + 4 r^{-1} s_4) - (\eta_{,r}/\eta) s_4 + \eta^{-1} [(\eta_{,r}/\eta) r S^{(1)} \\ & + \overline{(\eta_{,t} h^{(m)2})}] \} - 2 r^{-3} \int r^2 m_1 dr - m_1 + \beta (j_{,rr} + 4 r^{-1} j_{,r} - 2 N) \\ & + 2 \overline{\beta_{,r} f_{,r}} - \frac{1}{3} (r \overline{\beta N})_{,r} - r \overline{\beta_{,r} N}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\eta_{,t} = r (w_1 - w_2)_{,r} + 3 (w_1 - w_2), \quad (1.2)$$

$$\overline{p p'} = R^2 \eta T \overline{T'}, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} & J [\overline{u^2 \eta (c_p c_p' T T')}]_{,t} - \frac{1}{3} r \overline{K^{(3)} (c_p c_p' T T')_{,r}} \\ & - R^{-1} \overline{u^2 (c_p \overline{p p'}_{,t} + c_p' \overline{p p'}_{,t})} + \frac{1}{3} r R^{-1} \eta^{-1} K^{(3)} (\overline{p_{,r} c_p p'} + \overline{p'_{,r} c_p p}) \\ & = J \overline{u^2 \{ [\gamma (T T')_{,r}]_{,r} + 2 r^{-1} \gamma (T T')_{,r} \}} + W + W_1, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$W = -5 \overline{\lambda} [\overline{3 \dot{t}_{,rr}}(0) + \overline{N(0)}], \quad (1.4 a)$$

$$\begin{aligned} W_1 = & -15 \overline{(\varrho_0/\mu_0^{(1)}) u^2 (\mu^{(1)} \lambda^{(1)} \varrho' c_p' T' + \mu^{(1)'} \lambda^{(1)'} \varrho c_p T) \dot{f}_{,rr}^{(m)}(0)} \\ & - \overline{(\varrho_0/\mu_0^{(1)}) u^2 (\mu^{(1)} \varrho^{-1} \varrho_{,t} \varrho' c_p' T' + \mu^{(1)'} \varrho'^{-1} \varrho_{,t} \varrho c_p T) h^{(m)2}}, \end{aligned} \quad (1.4 b)$$

$$\varrho_0 H_{,t} = 2 \varrho_0 P + 2 \varrho_0 \overline{\lambda^{(1)} D(H)}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \eta \overline{R_{,t}^{(0)}} + \eta \overline{(\ln \varrho)_{,t} R^{(0)}} = & (r U_{,r} - 5 U) - \eta^{(2)} (r U_{,r} + 5 U) - D(W^{(1)}) - \frac{1}{2} W^{(0)} \\ & + \eta_{,r} \eta^{-1} (W_{,r}^{(1)} + 2 r^{-1} W^{(1)} + \frac{1}{2} r^{-1} \int r W^{(0)} dr) \\ & + (\lambda^{(1)} \eta + \mu \varrho') \overline{D(R^{(0)})} + (\mu \varrho')_{,r} \overline{R_{,r}^{(0)}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

All the symbols and notations are thoroughly explained in author's previous papers. The only difference is in the notation of the quantity $h^{(m)2}$ referring to the intensity vector of the magnetic field, which had been denoted in the previous paper [4] by h^2 . This was done in order to avoid confusion with the velocity-correlation-scalar-function h (introduced by v. KÁRMÁN).

2. Transformation of Equations.

Following CHANDRASEKHAR [1] one may introduce the vector potential \vec{A} according to its definition:

$$\vec{H} = \text{curl } \vec{A}. \quad (2.1)$$

No loss of generality will be entailed by the assumption that \vec{A} is solenoidal. Analogous to $\vec{h}^{(m)}$ define:

$$\vec{a} = [\mu_0^{(1)}/(4\pi\varrho_0)]^{1/2} \vec{A}, \quad (2.2)$$

so that

$$\vec{h}^{(m)} = \text{curl } \vec{a}, \quad \text{or} \quad h_i^{(m)} = -e_{ijk} a_{j,k}. \quad (2.3)$$

Let H and A be the defining scalars of the isotropic solenoidal tensors $\overline{h_i^{(m)} h_j^{(m)'}}$ and $\overline{a_i a_j'}$, respectively. The bilinear form

$$\overline{h_i^{(m)} h_j^{(m)'}} = r^{-1} H_{,r} \xi_i \xi_j - (r H_{,r} + 2 H) \delta_{ij}, \quad (2.4)$$

is associated with the bilinear form

$$\overline{a_i a_j'} = r^{-1} A_{,r} \xi_i \xi_j - (r A_{,r} + 2 A) \delta_{ij}, \quad (2.5)$$

by means of the equation:

$$\begin{aligned} \overline{h_i^{(m)} h_j^{(m)'}} &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jmn} \overline{a_{j,k} a_{m,n}'} = (\delta_{im} \delta_{kn} - \delta_{in} \delta_{km}) \overline{a_{j,k} a_{m,n}'} = \\ &= \overline{a_{j,k} a_{i,k}'} - \overline{a_{j,k} a_{k,i}'} = \overline{(a_j a_i')_{,kk'}} - \overline{(a_j a_k')_{,ki'}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

The last term in (2.6) is equal to zero since the bilinear form $\overline{a_j a_k'}$ is solenoidal. The LAPLACIAN operator applied to the form $\overline{a_j a_i'}$

$$(\overline{a_j a_i'})_{,kk'} = -(\overline{a_j a_i'})_{,\xi_k \xi_k}, \quad (2.7)$$

gives in the result a bilinear form X_{ij} [ROBERTSON, p. 215] whose first defining scalar is equal to:

$$X_1 = Q_{1,rr} + 6 r^{-1} Q_{1,r}, \quad Q_1 = r^{-1} A_{,r}. \quad (2.8)$$

After all the calculations are performed, from a comparison of (2.4) and (2.8) one easily obtains:

$$X_1 = r^{-1} H_{,r} = r^{-1} (A_{,rr} + 4 r^{-1} A_{,r})_{,r}, \quad (2.9)$$

or

$$H = - (A_{,rr} + 4 r^{-1} A_{,r}) = -D(A). \quad (2.10)$$

A similar relation can be found between the bilinear forms $\overline{u_i h_j^{(m)'}}$ and $\overline{u_i a_j'}$. As it is known, the curl operator transforms an isotropic tensor into a skew-isotropic one of the same order and vice-versa. Thus, using the notations from [4] one has:

$$\overline{u_i h_j^{(m)'}} = R^{(0)} \varepsilon_{ijl} \xi_l = -\varepsilon_{jmn} \overline{u_i a_{m,n}'} = \varepsilon_{jmn} \overline{u_i a_{n,m}'} = \varepsilon_{jmn} (\overline{u_i a_n'})_{,\xi_m} = q_{ij}, \quad (2.11)$$

where the defining scalar $q(r)$ is equal to [ROBERTSON, p. 217];

$$q \equiv R^{(0)} = -Q_1 + r^{-1} Q_{2,r}. \quad (2.12)$$

If B denotes the defining scalar of the isotropic solenoidal tensor $u_i a_n$, then after some elementary calculations one gets:

$$Q_1 = r^{-1} B_{,r}; \quad Q_2 = -(r B_{,r} + 2 B); \quad R^{(0)} = -D(B). \quad (2.13)$$

These formulas are in agreement with those given in [1]. In a way analogous to that presented in [1] one may assume:

$$\overline{\eta u_i u_j a_k} = \text{curl } E (\xi_i \varepsilon_{jkl} \xi_l + \xi_j \varepsilon_{ikl} \xi_l). \quad (2.14)$$

From [4] the relation

$$\overline{\eta u_i u_j h_k'} = U_{ijk}, \quad (2.15)$$

is known. Following [1] one has:

$$U = - (E_{,rr} + 6 r^{-1} E_{,r}). \quad (2.16)$$

Similarly

$$V = - (F_{,rr} + 6 r^{-1} F_{,r}), \quad (2.17)$$

if F is the defining scalar of $\overline{h_i^{(m)} h_j^{(m)} a_k'}$. Finally [1] one must have:

$$P = -D(G);$$

$$(\overline{h_i^{(m)} u_j} - \overline{h_j^{(m)} u_i}) \overline{a_k} = 2 G \varepsilon_{ijk} + r^{-1} G_{,r} (\xi_i \varepsilon_{jkl} \xi_l + \xi_j \varepsilon_{kil} \xi_l). \quad (2.18)$$

The equations governing the scalars A , B , E , F , and G can be found quite readily from equations (1.5) and (1.6). One easily obtains:

$$\varrho_0 D(A_{,t}) = 2 \varrho_0 D(G) + 2 \varrho_0 \lambda^{(1)} \overline{D^2(A)}. \quad (2.19)$$

But one cannot follow the reasoning in [1], according to which the equation in the incompressible fluid range corresponding to (2.18) may be associated with the form

$$A_{,t} = 2G + 2\lambda^{(1)} D(A), \quad (2.19 a)$$

for the reason that in the present case $\lambda^{(1)}$ is not constant. Similarly, equation (1.6) with the use of

$$D(r \partial/\partial r + 5) \equiv (r \partial/\partial r + 5) (\partial^2/\partial r^2 + 6r^{-1} \partial/\partial r),$$

may be transformed onto the form:

$$\begin{aligned} \overline{\eta D(B_{,i})} + \overline{\eta (\ln \varrho)_{,t} D(B)} = & D(r \partial/\partial r + 5) E - \overline{\eta^{(2)} D(r \partial/\partial r + 5) F} + \\ & + D(W^{(1)}) + \frac{1}{2} W^{(0)} - \overline{\eta_{,r} \eta^{-1} (W_{,r}^{(1)} + 2r^{-1} W^{(1)} + \frac{1}{2} r^{-1} \int r W^{(0)} dr)} + \\ & + \overline{(\lambda^{(1)} \eta + \mu \varrho') D^2(B)} + \overline{\mu \varrho'_{,r} (D(B))_{,r}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

which again cannot be simplified as it was done in the case of an incompressible fluid.

3. Invariants.

As it was shown in [5] in a homogeneous, isotropic turbulence of a compressible medium there is only one invariant, i. e., the density-disturbance moment. An identical situation exists in the present case. Following the usual procedure let equation (1.1) be multiplied by r^k , $k > 0$, integer, and integrate from $r = 0$ to $r \rightarrow +\infty$. It is obvious that one cannot obtain any invariant from this form for two reasons:

(a) the integral $\int_0^\infty \dots dr$ from the terms due to the compressibility phenomena does not vanish (analogous situation as in [5]), (b) the integral $\int_0^\infty \dots dr$ from the terms due to magnetic phenomena does not vanish. A similar situation is associated with equations (1.4), (1.5) and (1.6). If in (1.5) one assumes $\lambda^{(1)}$ to be constant, one easily obtains the result identical to that in [1]. Hence in the present case there exists only one invariant, i. e., density-disturbance moment. This is due to the chosen simple form of the continuity equation. In case one takes the relativistic forms of hydrodynamic equations [2, 6, 8] the situation will be different.

4. Locally Isotropic Turbulence.

In one of his previous papers [3] the author put forward a hypothesis of the transfer of energy in a locally isotropic turbulent system in a compressible fluid. The mean rate of the total energy (i. e., the sum of kinetic and intrinsic energies) per unit mass of the fluid is equal to:

$$\begin{aligned} D\varepsilon_i/Dt = & \varrho^{-1} \Phi + J \varrho^{-1} (k T_{,i})_{,i} + \frac{1}{2} [(\Sigma_i u_i^2)_{,t} + (\Sigma_j u_j^2)_{,i} u_i] - \\ & - \varrho^{-1} \phi u_{i,i} + \varrho^{-2} \phi [\varrho_{,t} + (\varrho u_i)_{,i}], \end{aligned} \quad (4.1)$$

where the last term is equal to zero and was introduced for the sake of simplifying the transformations. In [3] the author expressed the mean rate of the total energy by means of formula:

$$D \varepsilon_i / D t = \Sigma_1^3 (\varepsilon_i + \varphi_i), \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{15}{2} \overline{\nu B_{dd,rr}(0)}, \quad \varepsilon_2 = \overline{\nu \nu_2 \Gamma_{,rr}(0)}, \quad \nu_2 = \frac{5}{2} \overline{u^2 \varrho^{-2}},$$

$$\varepsilon_3 = \overline{\kappa \nu_3 \theta_{,rr}(0)}, \quad \kappa = \overline{k (\varrho c_p)^{-1}}, \quad \nu_3 = -\frac{3}{2} \overline{J (c_p^2 T^{-2})^{1/2}}, \quad (4.2 a)$$

$$\varphi_1 = -\frac{10}{3} \overline{\nu (\varrho^{-1} \varrho_{,t})^2}, \quad \varphi_2 = \frac{3}{2} \overline{(u^2)_{,t}}, \quad \varphi_3 = \overline{R T \varrho^{-1} \varrho_{,t}},$$

$$B_{dd} = \overline{(u'_d - u_d)^2}, \quad \Gamma = \overline{(\varrho' - \varrho)^2}, \quad \theta = \overline{(T' - T)^2}. \quad (4.2 b)$$

If the magnetic energy is taken into account, i. e., if the mean rate of the total energy is associated with the sum of kinetic, intrinsic and magnetic energies, then one obtains:

$$D \varepsilon_i / D t = \Sigma_1^4 (\varepsilon_i + \varphi_i), \quad (4.3)$$

$$\varepsilon_4 = 60 \overline{(\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \varrho^{-1} \mu^{(1)} \lambda^{(1)} H_2}, \quad \varphi_4 = -\overline{(\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \varrho^{-2} \mu^{(1)} \varrho_{,t} h^{(m)2}}, \quad (4.3 a)$$

or

$$\varepsilon_4 = -15 \overline{(\varrho_0 / \mu_0^{(1)}) \varrho^{-1} \mu^{(1)} \lambda^{(1)} f'_{,rr}^{(m)}(0)}. \quad (4.4)$$

Introduce the function

$$B^{(m)}(r, t) = 2 [\overline{h^{(m),2}(t)} - f^{(m)}(r, t)]. \quad (4.5)$$

Then one may transform (4.4) onto the expression

$$\varepsilon_4 = \frac{15}{2} \overline{\lambda^{(2)} B'_{,rr}(0)}, \quad (4.6)$$

$$\lambda^{(2)} = \overline{(4 \pi \mu_0^{(1)} \sigma)^{-1} \varrho_0 \varrho^{-1}}. \quad (4.6 a)$$

In the present hypothesis the author assumes that the transfer of energy from big eddies to small eddies takes place in four separate channels corresponding to four forms of energy: kinetic energy, energy due to change in volume, heat and magnetic energy. Let all the φ_i 's be ignored, $i = 1$ to 4, which is permissible in the case of a stationary turbulence, i. e., all the φ_i 's being dependent on time, vanish. Let the domain G of a turbulent flow be divided into two subdomains: G_1 of very large eddies and G_2 of very small eddies. The motion due to larger eddies in G_1 (large REYNOLDS Number) can be determined statistically

by the sum of four kinds of energy mentioned above, $\Sigma_1^4 \varepsilon_i$, which is a certain measure of the average total transferrable energy per unit mass of the fluid. Various cases may occur in a stationary turbulence,

for instance that this sum is constant and equal to the constant input of energy into the energetic turbulent system in question. The energy input may have various forms. For example, some external agency may supply the energy into the system in the form of kinetic energy only, etc. The sum of the kinetic energy, energy due to change in volume and magnetic energy is transferred in large eddies in form of kinetic energy and the part of energy due to heat is transferred by convection (although it may also be included into the kinetic energy). For large REYNOLDS Numbers the amount of energy dissipated through viscosity, heat conductivity and electric conductivity is negligibly small compared with the amount of energy passed in form of kinetic energy and convection (or kinetic energy alone). The motion of the smaller sets of eddies within G_2 will not, however, be determined uniquely by the sum of four kinds of energy, since these eddies dissipate some of the energy they receive through viscosity, heat conductivity and electric conductivity. The part of the kinetic energy and energy connected with the change in volume thus dissipated will depend upon the characteristic REYNOLDS NUMBER of the set of eddies concerned. The part of energy due to heat thus dissipated will depend on the characteristic PÉCLET Number. The part of magnetic energy thus dissipated will depend upon the number

$$M = V L / \lambda^{(2)} = N R_e, \quad N = \nu / \lambda^{(2)}, \quad (4.7)$$

with V denoting a representative velocity and L a representative length. The number M is analogous to the PÉCLET Number and the number N to PRANDTL's number. Thus the new factors required to specify the characteristic REYNOLDS-, PÉCLET-, and M -numbers are coefficient of kinematic viscosity, thermometric conductivity $\kappa = k/(c_p \rho)$ and $\lambda^{(2)}$. For the larger eddies within G_1 the characteristic REYNOLDS-, PÉCLET-, and M -numbers are very large, and the motion is independent of these three coefficients (ν , κ , $\lambda^{(2)}$). Notice, that passing from G_1 to G_2 , these coefficients vary due to variation of the temperature, density and pressure. Thus the parts due to the same kinds of energy are different in G_1 and G_2 , even if the sum $\sum_1^4 \varepsilon_i$ is constant and the same in both these subdomains. This expresses the mutual inter-dependence and transfer of energy from one form into another, a phenomenon which is not apparent in the theory of locally isotropic turbulence in an incompressible fluid. The transfer of energy from one form into another takes place by means of the coefficients μ , k , σ , $\mu_0^{(1)}$, an item which seems to be in a full agreement with physical phenomena.

5. Possible Solutions

All of the equations cited above have one common feature — they contain highly complicated composite random variables and correlation functions. If a way is not found to deal with these quantities one may

arrive at the conclusion that some modern theories of turbulence based on hydrodynamic equations, which give certain fair or even good results in the range of incompressible fluids, may be less useful when compressibility phenomena are taken into account. Let us discuss the possible ways of attacking the problem.

One way is to apply the known result of the statistical mathematics that the mathematical expectation (mean value) of a product of two random variables is

$$E \{Q_i; Q_j\} = E \{Q_i\} E \{Q_j\} + S(Q_i; Q_j), \quad (5.1)$$

$$S(Q_i; Q_j) = C(Q_i; Q_j) \sigma(Q_i) \sigma(Q_j), \quad (5.2)$$

where the symbols used denote: C the correlation coefficient and σ standard deviation. The quantities S may be assumed on the basis of test and experience, thus enabling one to evaluate the necessary terms. A second possibility is to introduce a certain type of "small perturbation" from a statistical standpoint, that is to introduce the independent random variables. The statistical small perturbations are introduced into the domain of an incompressible fluid flow and represent the effect of compressibility. The velocity random variables may serve directly as a link between various terms of the equations of motion and energy. To the velocity random functions, $\overline{u_i u_j'}$, there are attached other random functions such as $\overline{\mu \mu'}$, $\overline{\rho \rho'}$, etc. It seems that this method may be applied to rather small subdomains into which the entire flow domain could be divided. A third possibility is to neglect some terms or certain types of energy and to assume the remaining part of energy to be a certain function or constant (KOLMOGOROFF). A fourth possibility is to apply approximations of various types. High speed computing devices may be of a great help in all the cases.

List of References.

1. CHANDRASEKHAR, S.: The Invariant Theory of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics. Proceedings, Royal Soc., A, **204**, pp. 435—449 (1950).
2. ECKART, C.: The Thermodynamics of Irreversible Processes. II. Relativistic Theory of the Simple Fluid. Phys. Rev., **58**, p. 919 (1940).
3. KRZYWOBLOCKI, M. Z.: On Locally Isotropic Turbulence in Compressible Fluids. Proceedings of the Second Midwestern Conference on Fluid Mechanics. The Ohio State University, March 1952. (To be published.)
4. KRZYWOBLOCKI, M. Z.: On the Equations of Isotropic Turbulence in Magneto-Hydrodynamics of Compressible Medium. Acta Physica Austriaca. (To be published.)
5. KRZYWOBLOCKI, M. Z.: On the Invariants in the Turbulence in Compressible Fluids. Journal of the Franklin Institute. (To be published.)
6. LAMLA, E.: Über die Hydrodynamik des Relativitätsprinzips. Dissertation, Berlin (1912).
7. ROBERTSON, H. P.: The Invariant Theory of Isotropic Turbulence. Proc. Cambr. Phil. Soc., Vol. **36**, pp. 209—223 (1940).
8. TAUB, A. H.: Relativistic RANKINE-HUGONOT Equations. Physical Review, **74** (3), pp. 328—334 (1948).

Über die Nullpunktssuszeptibilität einer linearen antiferromagnetischen Atomkette.

Von

E. Ledinegg und P. Urban.

Institut für theoretische Physik der Universität Graz.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 20. Juni 1952.)

Zusammenfassung.

Unsere Kenntnis über die magnetischen Eigenschaften der ferro- und antiferromagnetischen Substanzen sind auch noch heute, wenn man von den auf phänomenologischer Grundlage aufgebauten Theorien absieht, keineswegs sehr weit gediehen. Selbst bei Verwendung der einfachsten Modelle atomarer Bindung, wie es etwa das HEISENBERGSche Modell darstellt, werden die mathematischen Schwierigkeiten außerordentlich groß. Noch am einfachsten ist die mathematische Behandlung der linearen Atomkette, deren Theorie wir den grundlegenden Arbeiten von BETHE, SLATER und HULTHÉN verdanken. Im Sinne einer Störungsrechnung erster Ordnung erhält man aus der SCHRÖDINGER-Gleichung einer aus N Atomen bestehenden Konfiguration den Wechselwirkungsoperator im Spinraum, dessen Eigenwertspektrum für das magnetische Verhalten der Kette von entscheidender Bedeutung ist.

Für eine große Anzahl von Atomen läßt sich die Eigenwertverteilung aus einer linearen Integralgleichung, welche von HULTHÉN stammt, berechnen. Die Integration der angeführten Integralgleichung wurde jedoch nicht von HULTHÉN durchgeführt, welcher die Verteilung der Eigenwerte um den tiefsten Energiewert nach einer statistischen Methode berechnete. Auf diese Weise ergibt sich ein endlicher und von der magnetischen Feldstärke unabhängiger Wert der Nullpunktssuszeptibilität.

In der vorliegenden Arbeit wird die erwähnte Integralgleichung asymptotisch gelöst. Man gelangt dabei, im Gegensatz zu dem Ergebnis von HULTHÉN, zu einer von H (Magnetfeld) abhängigen Nullpunktssuszeptibilität, welche für ein verschwindendes äußeres Magnetfeld den Wert Null annimmt.

Da die Integralgleichungsmethode für eine genügend große Atomanzahl ein strenges Rechenverfahren darstellt, während die statistische Methode unter der gleichen Voraussetzung stets Näherungswerte liefert, dürften die aus der HULTHÉNSchen Integralgleichung gewonnenen Ergebnisse von Interesse sein.

§ 1. Einleitung.

Seit HEISENBERG¹ werden die ferromagnetischen Eigenschaften eines Mediums bekanntlich durch die Austauschwechselwirkung benachbarter Atome erklärt. Das von WEISS formal eingeführte zwischenatomare H -Feld erweist sich dabei dem Austauschintegral J ($J > 0$) proportional. Auch im Falle paramagnetischer Substanzen ($J < 0$) läßt sich das HEISENBERGSche Modell mit Vorteil verwenden, wenn man eine homoöpolare Bindung zwischen den Atomen und reine Spin-entartung voraussetzt². Der Wechselwirkungsoperator A ist dann in einfacher Weise durch die PAULISchen Spinvektormatrizen realisierbar³. Der HAMILTON-Operator H setzt sich additiv aus A und den mit A vertauschbaren Operator M der potentiellen Energie der magnetischen Dipole in einem vorgegebenen äußeren Magnetfelde \vec{H} zusammen. Die Schwierigkeit besteht in der Auffindung der Eigenwerte von A , da jene des Operators M leicht angebar sind. Ist das Eigenwertspektrum von H bekannt, so findet man daraus prinzipiell die Suszeptibilität für eine beliebige Temperatur T des paramagnetischen Mediums mit Hilfe der Zustandssumme

$$Z = \sum_v e^{-H_v(H)/kT},$$

wobei H_v den v -ten Eigenwert des HAMILTON-Operators bezeichnet aus der Formel:

$$\chi = \frac{\kappa T}{H} \cdot \frac{\partial \lg Z}{\partial H}$$

HULTHÉN⁴ hat für ein kubisches Rauggitter nach einem halb-klassischen Verfahren, welches auf KRAMERS und HELLER⁵ zurückgeht, die Suszeptibilität in der Nähe des absoluten Nullpunktes berechnet. Der Vorgang war dabei der folgende:

Nach Aufstellung der Zustandssumme, wobei der HAMILTON-Operator wie schon früher bemerkt, durch die PAULISchen Spinvektormatrizen dargestellt ist, wird die korrespondierende klassische HAMILTON Funktion \hat{H} durch Übergang der PAULISchen Matrizen zu gewöhnlichen Vektoren der weiteren Rechnung zugrunde gelegt. Es erfolgt die Berechnung des Energieminimums E_0 (entsprechend dem Grundzustand des HAMILTON-Operators im antiferromagnetischen Fall) und die Entwicklung von \hat{H} in der Nähe von E_0 durch kanonisch konjugierte Variable. Die entstehende quadratische Form wird dann mittels einer

¹ W. HEISENBERG, Zs. f. Phys. **49**, 619 (1928).

² J. C. SLATER, Phys. Rev. **35**, 509 (1950).

³ H. BETHE, Handb. d. Phys., H. GEIGER u. K. SCHEEL 1927, XXIV, 2, 598.

⁴ L. HULTHÉN, Proc. Roy. Soc. Amst. **39**, 190 (1936).

⁵ G. HELLER u. H. A. KRAMERS, Proc. Roy. Soc. Amst. **37**, 378, 1954.

passenden linearen kanonischen Transformation in ihre Hauptachsen-gestalt übergeführt. Die einzelnen Glieder lassen sich dabei als HAMILTON-Funktionen harmonischer Oszillatoren ansehen, womit die einfache Möglichkeit einer Rückquantelung gegeben ist. In diesem Sinne werden die Eigenwerte der korrespondierenden quantenmechanischen Oszillatoren in \hat{H} eingesetzt, wobei die auftretenden Nullpunktssuszeptibilitäten nicht zu berücksichtigen sind. Damit ist ein expliziter Ausdruck für die Zustandssumme gewonnen, aus welcher dann nach längerer Rechnung die Suszeptibilität folgt. Für die N -gliedrige lineare Kette findet HULTHÉN nach der nämlichen Methode⁶

$$\chi = \frac{\mu_B^2}{2I} \cdot N \left(\mu_B = \frac{e \hbar}{4 \pi m c} = \text{BOHRsches Magneton} \right). \quad (1 a)$$

Das hier skizzierte Verfahren, welches durch ein zweimaliges Anwenden des Korrespondenzprinzips zur näherungsweisen Berechnung der Eigenwerte des HAMILTON-Operators gekennzeichnet ist und wesentliche klassische Züge enthält, wurde von HULTHÉN selbst durch ein ausschließlich auf quantenmechanische Grundlage beruhendes Verfahren abgelöst.

Auf Grund einer vorausgegangenen Arbeit von SLATER berechnet HULTHÉN in [1] nach einer statistischen Methode die spektrale Verteilung der Bindungsenergie und die Nullpunktssuszeptibilität. Es handelt sich dabei um ein quantenmechanisches Näherungsverfahren, das mehrstufig aufgebaut ist und in eine Endstufe exakt mit den Funktionen des Darstellungsraumes R von A operiert. Bei einer Näherung beliebiger Stufe werden die 2^N -Funktionen von R in Klassen eingeteilt und jeweils die Klassensummen gebildet, welche einen Darstellungsraum \bar{R} aufspannen, der bezüglich des Operators A näherungsweise invariant ist. Die Hauptachsentransformation von A in \bar{R} ergibt dann ebenfalls näherungsweise die gesuchten Eigenwerte von A in bezug auf R . Bekanntlich wird R durch die folgenden 2^N -Spinfunktionen definiert:

$$w_k = u_1^{x_1^{(k)}} \cdot u_2^{x_2^{(k)}} \dots u_N^{x_N^{(k)}} \quad \text{mit} \quad x_r = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} (r = 1, 2 \dots N),$$

wobei die u_r^+ , u_r^- gewöhnliche Spinvektoren bedeuten, die jeweils zu einem Darstellungsraum $D_{1/2}$ gehören. Zu Funktionen der nämlichen Klasse gehören z. B. in der Näherung der ersten Stufe alle u_k , welche die gleiche Anzahl $+$ Spine und eine gleiche Anzahl von $(+ -)$ Kombinationen in der Folge $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_N^k)$ besitzen. In [1] wird nach längerer Rechnung für die Näherung der ersten Stufe die paramagnetische Suszeptibilität angegeben:

$$\chi = \frac{\mu_B^2}{2I} \cdot N \cdot 0,473. \quad (1 b)$$

⁶ L. HULTHÉN, Über das Austauschproblem eines Kristalles, Arkiv f. Matematik, Upsala, 26 A. Nr. 11 (1938).

Es zeigt sich, daß der tiefste Eigenwert E_0 des Wechselwirkungsoperators, welcher natürlich in Gl. (1 b) implizite eingeht, um etwa 5% höher liegt als der exakte Wert, den ebenfalls HULTHÉN nach einem anderen Verfahren rein quantenmechanischer Natur berechnet hat. Die letztere Methode, mit welcher wir uns noch ausführlich zu beschäftigen haben, führt auf eine lineare Integralgleichung und stellt für eine genügend große Atomanzahl ein strenges Rechenverfahren dar. Da die statistische Methode unter der gleichen Voraussetzung nur Näherungswerte liefert, war es von Interesse, die Energieverteilung direkt aus der angeführten Integralgleichung zu berechnen, um daraus die Suszeptibilität im Nullpunkt zu gewinnen.

Während HULTHÉN gemäß Gl. (1 b) eine endliche und von der magnetischen Feldstärke unabhängige Suszeptibilität erhält, ergibt im Gegensatz dazu die Integralgleichungsmethode, welche von HULTHÉN nur zur Berechnung des tiefsten Energiewertes herangezogen wurde, eine von \vec{H} abhängige Nullpunktssuszeptibilität, die für ein verschwindendes äußeres Magnetfeld den Wert Null annimmt.

Im folgenden soll zunächst die grundlegende Integralgleichung nach [1] abgeleitet werden⁸, worauf wir ihre Integration durchführen. Da zur Berechnung von χ (entsprechend kleine Magnetfelder vorausgesetzt) nur die Kenntnis des Energiespektrums in der Umgebung von E_0 erforderlich ist, wird es genügen, die Integralgleichung asymptotisch zu lösen.

§ 2. Die quantentheoretische Behandlung der linearen Atomkette nach Bethe und Hulthén.

Der Wechselwirkungsoperator A , dessen Eigenwerte im Raume der Funktionen (2) in der Umgebung von E zu berechnen sind, lautet

$$A = -I \sum_{k=1}^N Q_{k,k+1} \quad \text{mit} \quad Q_{k,l} = 1 - P_{k,l} \quad \text{und} \quad P_{k,l} = \frac{1}{2} (1 + 4 (\vec{\sigma}_k, \vec{\sigma}_l)). \quad (3a)$$

In Gl. (3) bedeutet $P_{k,l}$ einen Transpositionsoperator, welcher auf dem k - und l -ten Spinvektor wirkt und durch

$$\left. \begin{aligned} P_{k,l} u_k^{\pm} u_l^{\pm} &= u_k^{\pm} u_l^{\pm}, \\ P_{k,l} u_k^{\pm} u_l^{\mp} &= u_k^{\mp} u_l^{\pm} \end{aligned} \right\} \quad (3b)$$

definiert ist. Die $\vec{\sigma}_k$ stellen die PAULISCHEN Spinvektormatrizen dar. Der Operatorausdruck (3) gilt unter der Voraussetzung, daß jeweils nur das k -te Atom mit dem $(k-1)$ -ten und $(k+1)$ -ten Atom der linearen Kette in Wechselwirkung steht, welche durch das Austausch-

⁸ Wir folgen dabei der HULTHÉNSCHEN Ableitung [1], welche wir in ihren wesentlichen Zügen hier darstellen.

integral I (unabhängig von k) gekennzeichnet ist. Ferner wird die Kette als geschlossen angenommen⁹.

Zur Berechnung der Wirkung von A auf die Funktionen (2) von R ist es zweckmäßig, diese durch ihre $+$ Spinverteilung zu charakterisieren. Hat man also die Kette in einer beliebigen, dann aber festgehaltenen Weise numeriert ($1 \leq n \leq N$), so ist durch $\psi^{(n_1, n_2 \dots n_r)}$ eindeutig eine bestimmte Funktion (2) festgelegt. Alle Funktionen (2) mit gleichem r ($r = \text{Anzahl der } + \text{ Spine}$) bilden einen bezüglich A invarianten Unterraum von R , welcher durch $M_s = r - 1/2N$ bestimmt ist.

Zunächst erhält man:

$$-\frac{A}{I} \psi^{(n_1, n_2 \dots n_r)} = \sum_{(n'_1 \dots n'_r)} \alpha_{(n'_1 \dots n'_r)}^{(n_1 \dots n_r)} \psi^{(n'_1, n'_2 \dots n'_r)}. \quad (4 \text{ a})$$

Die Summe rechter Hand ist über alle $\binom{N}{r}$ Kombinationen $(n'_1, n'_2 \dots n'_r)$ zu bilden. Die $-A/I$ darstellende Matrix $\left(\alpha_{(n'_1 \dots n'_r)}^{(n_1 \dots n_r)} \right)$ im Unterraum R_{M_s} ist wegen Gl. (3 a) prinzipiell bekannt. Alle in R_{M_s} gelegenen Eigenvektoren ψ_i von $-A/I$ haben dann die Form

$$\psi_i = \sum_{(n'_1, n'_2 \dots n'_r)} a_{n'_1, n'_2 \dots n'_r}^{(i)} \psi^{(n'_1, n'_2 \dots n'_r)} \quad (4 \text{ b})$$

Aus

$$-\frac{A}{I} \psi = 2 \varepsilon \psi, \quad (4 \text{ c})$$

wobei mit $2 \varepsilon = E$ die Eigenwerte bezeichnet werden, findet man mit Berücksichtigung von Gl. (4 a) und (4 b) das folgende lineare und homogene System:

$$2 \varepsilon_{n_1, n_2 \dots n_r} = \sum_{C \{n'_1 \dots n'_r\}} \alpha_{(n'_1 \dots n'_r)}^{(n_1 \dots n_r)} a_{n'_1, n'_2 \dots n'_r}. \quad (4 \text{ d})$$

Daraus sind die $a_{n_1 \dots n_r}$ und die Eigenwerte E zu ermitteln. Die umständliche Rechnung, die am einfachsten gelingt, wenn Gl. (4 d) als Differenzengleichung aufgefaßt wird, wurde zunächst von BETHE und später von HULTHÉN (s. [1]), welcher die BETHESche Lösung vollständigen konnte, durchgeführt.

HULTHÉN findet:

$$a_{n_1, n_2 \dots n_r} = \sum_{C_s} \sum_{P_s} e^{i \left\{ \sum_{j=1}^s k_{P_j} n_{\mu_j} + \sum_{i < l} \varphi_{P_j, P_l} \right\}} \quad (5 \text{ a})$$

⁹ Für $k = n + 1$ ist wieder 1 zu setzen; die k stellen also die Restklassen mod (N) dar.

mit

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^s (1 - \cos k_j) \quad (5 \text{ b})$$

und

$$2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi_{j,l} = \operatorname{ctg} \frac{1}{2} k_j - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} k_l, \quad (5 \text{ c})$$

$$N k_j = 2\pi \lambda_j + \sum_l \varphi_{j,l}. \quad (5 \text{ d})$$

Dabei ist λ_j eine ganze Zahl in den Schranken $0 \leq \lambda_j \leq N - 1$. Gl. (5 a) bedarf einer näheren Erklärung. Schreibt man Gl. (4 d) in eine partielle Differenzengleichung zweiter Ordnung um, so erkennt man leicht, daß

$$a_{n_1, n_2, \dots, n_r} = e^{i \left\{ \sum_{j=1}^s k_j n_j + \sum_{j < l} \varphi_{j,l} \right\}} \quad (6 \text{ a})$$

eine partikuläre Lösung darstellt, wenn die reell vorausgesetzten Wellenzahlen k_j die Eigenwertgleichung (5 b) befriedigen und die auftretenden $\varphi_{j,l}$ der Bedingung (5 c) genügen. Ferner erhält man durch eine beliebige Permutation P_s der k_j ($j = 1 \dots s$) in Gl. (6 a), wobei k_j in k_{P_j} übergeht, wiederum eine zu $(n_1, n_2 \dots n_r)$ gehörige Lösung. Ebenso hat dann die Summe

$$\sum_{P_s} e^{i \left\{ \sum_{j=1}^s K_{P_j} n_j + \sum_{j \leq l} \varphi_{P_j, P_l} \right\}} \quad (6 \text{ b})$$

die gleiche Eigenschaft. In Gl. (6 b) wurden aus der Folge $(n_1, n_2 \dots n_r)$ zum Aufbau von Gl. (6 b) die ersten s -Glieder herausgegriffen. Zu weiteren Lösungen gelangt man, wenn statt dessen ein beliebiges s -Tupel $(n_{\mu_1}, n_{\mu_2} \dots n_{\mu_s})$ verwendet wird. Indem alle Kombinationen der r Elemente $(m_1 \dots m_r)$ zur s -ten Klasse gebildet werden und darüber summiert wird, findet man den Ausdruck (5 a).

Wir bemerken noch, daß die Beziehung (5 d) aus der Periodizitätsbedingung

$$a_{n_1, n_2, \dots, n_r} = a_{n_1, n_2, \dots, n_1 + N}$$

folgt, welche die Geschlossenheit der Kette zum Ausdruck bringt.

Die gesuchten Eigenwerte $E = 2\varepsilon$ von Gl. (4 d) sind wie aus Gl. (5) ersichtlich, ausschließlich durch die Gl. (5 b), (5 c) und (5 d) bestimmt. In diesen geht wesentlich die Zahl s (Anzahl der von Null verschiedenen Wellenzahlen k_j) ein, während r (Anzahl der Spine) nur für Gl. (5 a) von Bedeutung ist. Dies hat zur Folge, daß alle Eigenfunktionen ψ , welche sich aus Gl. (5 a) bei festgehaltenem s und einem beliebigen

$r \geq s$ konstituieren¹⁰ den gleichen Eigenwert E besitzen. Geht man also von einem festen s -Wert aus, so findet man notwendig eine in M_s aufsteigende Reihe von Eigenfunktionen zum Eigenwert E :

$$\begin{array}{l|l} \psi_s^{(1)} & r = s, \quad M_s = s - N/2 \\ \psi_s^{(2)} & r = s + 1, \quad M_s = s - N/2 + 1 \\ \vdots & \vdots \\ \psi_s^{(N/2 - s + 1)} & r = N/2, \quad M_s = 0 \end{array}$$

Dazu kommen noch die Eigenfunktionen zum Eigenwert E , welche ϱ , — Spine besitzen, wobei ϱ der Ungleichung $s \leq \varrho < N/2$ genügt. Da daraus für r die Schranken $N/2 + 1$ und $N - s$ folgen, erhalten wir:

$$\begin{array}{l|l} \psi^{(N/2 - s + 2)} & r = N/2 + 1, \quad M_s = -1 \quad (\varrho = N/2 + 1) \\ \vdots & \vdots \\ \psi^{(N - 2s + 1)} & r = N - s, \quad M_s = N/2 - s \quad (\varrho = s) \end{array}$$

Die angeführten $N - 2s + 1$ Eigenfunktionen bilden nach einem bekannten gruppentheoretischen Satz einen drehungsinvarianten Unterraum von R , welcher durch die Spinquantenzahl

$$S = N/2 - s = \text{Max. } M_s \quad (7)$$

charakterisiert ist.

Weiter läßt sich aus dem Lösungssystem Gl. (5) folgern, daß die Differenz zweier λ -Werte höchstens 2 betragen kann. Ist nämlich $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2} = 1$, so erhält man für $a_{n_1 n_2 \dots n_r} = 0$, während der Fall $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2} = 0$ zu einer Lösung führt, die schon in der Lösungsmannigfaltigkeit $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2} \geq 2$ enthalten ist.

Wir versuchen nunmehr aus Gl. (5) durch geeignete Festlegung von s und r den höchsten Eigenwert von $-A/I$, bzw. den tiefsten Eigenwert von A zu bestimmen. Bekanntlich ist dieser durch $M_s = 0$, $S = 0$ charakterisiert¹¹. Mit Hilfe von Gl. (7) erhalten wir dann

$$r = s = N/2. \quad (8)$$

Umgekehrt folgt bei Bestehen von Gl. (8) ebenfalls $M_s = S = 0$. Gl. (8) ist also eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Erfassung tiefsten Eigenwertes E_0 . Da wegen $s = N/2$ genau $N/2$ verschiedene λ_j -Werte auftreten müssen, wobei $\lambda_{j_1} - \lambda_{j_2} \geq 2$ sein soll, folgt daraus notwendig für λ_j die Form¹²

$$\lambda_j = 2j - 1 \quad (j = 1, 2 \dots N/2).$$

¹⁰ Die Lösungsmannigfaltigkeit (5) gilt nur für $r \leq N/2$; ist $r > N/2$ so hat man die Verteilung der — Spine zu betrachten. Die Gl. (5) lauten dann formal gleich.

¹¹ S. diesbezüglich [1] und auch E. LEDINEGG und P. URBAN, Acta Physica Austriaca.

¹² Der an sich mögliche Wert $\lambda_j = 0$ ist auszuschließen, da sich daraus entgegen der Voraussetzung eine der s Wellenzahlen zu Null ergeben würde.

Für eine genügend große Atomanzahl läßt sich nun Gl. (5 c) und (5 d) in eine lineare Integralgleichung umschreiben. Als kontinuierliche Variable bietet sich zwanglos

$$x = \frac{2}{N} j \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (10 a)$$

dar, so daß λ_j in $N \cdot x$ gemäß Gl. (9) übergeht. Die Gln. (5) lauten dann:

$$\varepsilon = \frac{N}{2} \int_0^1 (1 - \cos k(x)) dx \quad (5 b')$$

$$k(x) = 2\pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(x, y) dy \quad (5 d')$$

mit

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} \varphi(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{ctg} \frac{1}{2} k(x) - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} k(y) \right\}. \quad (5 c')$$

Nach Auflösung der Integralgleichung (5 d') ergibt sich durch Ausführung der Integration in Gl. (5 b') das gesuchte Energieminimum.

HULTHÉN verwandelt im weiteren Verlauf die für die praktische Rechnung sehr unhandliche Gl. (5 d') in eine lineare Integralgleichung. Dies geschieht durch Einführung einer neuen unabhängigen Veränderlichen $A(k) = dx/dk$, indem man Gl. (5 d') nach k differenziert. Die damit linearisierte Integralgleichung wird durch die Substitution

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} k = \xi, \quad dk = -\frac{2 d\xi}{1 + \xi^2}$$

weiter vereinfacht. Setzt man noch $-dx/d\xi = f(\xi)$, so erhält man an Stelle von Gl. (5 d') und (5 c'):

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2} = f(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\eta) d\eta}{4 + (\xi - \eta)^2}, \quad (11 a)$$

während Gl. (5 b') durch die angeführten Substitutionen in

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{N}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos k) A(k) dk = N \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{1}{2} k \cdot A(k) dk = \\ &= N \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 \frac{1}{2} k(\eta) \cdot f(\eta) d\eta = N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\eta)}{1 + \eta^2} d\eta \end{aligned} \quad (11 b)$$

übergeht.

Auf analoge Weise folgt aus Gl. (5) die spektrale Energieverteilung um E_0 . Diese ergibt sich, wenn man die höchsten Eigenwerte von $-A/I$ für $M_s \neq 0$ oder $r \neq N/2$ aufsucht. Wir setzen demnach

$$r = \frac{N}{2} (1 - \sigma) \quad \text{mit} \quad \sigma \geq 0 \quad (12 \text{ a})$$

und führen wiederum die kontinuierliche Variable x mittels $j = N/2 x$ ein.

Aus Gl. (5 b) ist ersichtlich, daß 2ε bei vorgegebenem r seinen höchsten Wert annimmt, wenn die Wellenzahlen k_j in der Nähe von π liegen und $s = r$ gewählt wird. Die λ_j sind dann wegen Gl. (5 d) symmetrisch um $N/2$ angeordnet und besitzen im übrigen wie früher die Form

$$\lambda_j = 2j - 1.$$

Da

$$j_{Max} - j_{Min} = r = \frac{N}{2} (1 - \sigma)$$

ist und daher

$$\lambda_{Max} - \lambda_{Min} = N (1 - \sigma) \quad (12 \text{ b})$$

wird, ferner

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{Min} &= N x_{Min} \\ \lambda_{Max} &= N x_{Max} = N (1 - x_{Min}) \end{aligned} \right\} \quad (12 \text{ c})$$

gilt, erhält man aus Gl. (12 b) und (12 c) den Variabilitätsbereich von x zu

$$\frac{\sigma}{2} \leq x \leq 1 - \frac{\sigma}{2}. \quad (13)$$

Mittels Gl. (5 d) und (5 c) bekommt dann HULTHÉN wie früher eine Integralgleichung zur Bestimmung der Wellenzahlfunktion $k(x)$. Die Integralgleichung wird wieder durch die Substitutionen

$$A(k) = \frac{dx}{dk}$$

und

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} k = \xi$$

linearisiert und in eine rationale Form gebracht; es kommt:

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2} = f(\xi) + \frac{2}{\pi} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{f(\eta) d\eta}{4 + (\xi - \eta)^2} \quad (14 \text{ a})$$

$$\varepsilon = N \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{f(\eta)}{1 + \eta^2} d\eta = F(\xi_0) \quad (14 \text{ b})$$

mit

$$f(\xi) = -\frac{dx}{d\xi}.$$

Dabei ist ξ_0 durch

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} k \left(\frac{\sigma}{2} \right) = \xi_0$$

gegeben. $f(\xi)$, σ und ξ_0 hängen durch die Gleichung

$$\int_{-\xi_0}^{+\xi_0} f(\xi) d\xi = - \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{dx}{d\xi} d\xi = x(-\xi_0) - x(\xi_0) = 1 - \sigma \quad (14 c)$$

zusammen. Aus Gl. (14 a) gewinnt man zunächst durch Integration die Wellenzahldichtefunktion $f(\xi)$ und mittels Gl. (14 b) die Energieverteilung als Funktionen von ξ_0 . Da die Energieverteilung in Abhängigkeit von σ benötigt wird¹³, hat man noch in Gl. (14 b) mit Hilfe von Gl. (14 c) ξ_0 durch σ zu substituieren.

Wie aus Gl. (12 a) ersichtlich ist, gibt σ den auf $N/2$ bezogenen Zuwachs von $-$ Spine gegenüber dem tiefsten Energiewert E_0 ($\sigma = 0$) an. Da wir nur die Energieverteilung in der Nähe von E_0 benötigen, darf man $\sigma \ll 1$ voraussetzen, also $\xi_0 \gg 1$ annehmen. Die anfangs gemachte Bemerkung, welche sich auf die asymptotische Integration von Gl. (14 a) bezieht, ist in diesem Sinne zu verstehen.

Das hier geschilderte Verfahren, welches von Gl. (4 d) zur Integralgleichung (14) führt, beruht wesentlich auf der Verwendung der BETHEschen Lösung, die aus dem System (5) durch die Forderung $r = s$ hervorgeht, also eine spezielle Schar der HULTHÉNSchen Mannigfaltigkeit Gl. (5) darstellt. Diese liefert zu jedem ($r \leq N/2$) den dazugehörigen tiefsten Eigenwert von A .

§ 3. Berechnung des tiefsten Eigenwertes E des Wechselwirkungsoperators A für $N \gg 1$.

Wie schon einleitend bemerkt, wurde in [1] die Integration von Gl. (11 a), bzw. die Berechnung von E_0 gemäß Gl. (11 b) durchgeführt. Dabei gelangte die Methode der Kerniteration, also die Darstellung von $f(\xi)$ durch eine NEUMANNsche Reihe zur Anwendung. Nachträglich erfolgt dann die Aufsummierung zu einem geschlossenen Ausdruck.

An Stelle dieses etwas langwierigen Verfahrens wollen wir die Integration direkter durch eine FOURIERSche Integraltransformation vornehmen, welche unmittelbar einen geschlossenen Ausdruck für $f(\xi)$ ergibt.

¹³ Die spektrale Verteilung von M liegt in Abhängigkeit von σ vor.

Wir führen zunächst in Gl. (11 a) die folgenden Abkürzungen ein:

$$\frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2} = g(\xi) \quad (15 \text{ a})$$

$$\frac{1}{4(1 + (\xi - \eta)^2)} = K(\xi - \eta). \quad (15 \text{ b})$$

Damit erhält man:

$$g(\xi) = f(\xi) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) d\eta, \quad \lambda = \frac{2}{\pi}. \quad (16 \text{ a})$$

Multiplikation mit $e^{-iu\xi}$ und nachfolgende Integration liefert:

$$\hat{g}(u) = \hat{f}(u) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) e^{-iu\xi} d\xi d\eta \quad (16 \text{ b})$$

wobei

$$\hat{g}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) e^{-iu\xi} d\xi \quad (16 \text{ c})$$

und

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-iu\xi} d\xi \quad (16 \text{ d})$$

gesetzt wurde. Das Doppelintegral zerfällt durch die Substitution $\xi - \eta = v$, $\eta = t$ in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) e^{-iu\xi} d\xi d\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt \int_{-\infty}^{+\infty} K(v) e^{-iuv} dv$$

und wir bekommen aus Gl. (16 b)

$$\hat{g}(u) = \hat{f}(u) \{1 + \hat{K}(u)\lambda\} \quad \text{mit} \quad \hat{K}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(v) e^{-iuv} dv.$$

Die Auflösung nach $\hat{f}(u)$ ergibt:

$$f(u) = \frac{\hat{g}(u)}{1 + \lambda \hat{K}(u)}. \quad (16 \text{ f})$$

Daraus findet man nach der FOURIERSchen Reziprozitätsformel die gesuchte Dichtefunktion

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{g}(u)}{1 + \lambda \hat{K}(u)} e^{iu\xi} du. \quad (17)$$

Es handelt sich zunächst um die Auswertung der Integrale

$$\hat{g}(u) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iu\xi}}{1 + \xi^2} d\xi$$

und

$$\hat{K}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iu\xi}}{4 + \xi^2} d\xi.$$

Diese sind mittels der Residuen-Methode sofort zu integrieren und wir erhalten:

$$\hat{g}(u) = \begin{cases} 2e^{-u}, & \text{für } u > 0 \\ 2e^{+u}, & \text{für } u < 0 \end{cases}, \quad \hat{K}(u) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-2u}, & \text{für } u > 0 \\ \frac{\pi}{2} e^{+2u}, & \text{für } u < 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Mit Gl. (18) geht Gl. (16 f) in

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} \frac{2e^{-u}}{1 + \lambda \frac{\pi}{2} e^{-2u}} & \text{für } u > 0 \\ \frac{2e^{+u}}{1 + \lambda \frac{\pi}{2} e^{+2u}} & \text{für } u < 0 \end{cases}, \quad (19 a)$$

über. Setzt man $\lambda = 2/\pi$ [vergl. Gl. (16 a)], so erhält man im gesamten Intervall $-\infty < u < +\infty$ nur eine analytische Funktion der Form

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{\cos u} \quad (19 b)$$

Daher bekommt man für Gl. (17)

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iu\xi}}{\cos u} du.$$

Zur Integration von Gl. (20) wählt man am einfachsten in der komplexen u -Ebene einen Weg, welcher längs der reellen Achse von $-\infty$ nach $+\infty$ führt und auf einer Parallelen zur reellen Achse im Abstände $i\pi$ von ∞ nach $-\infty$ zurückgeht. Innerhalb des angegebenen Streifens liegt ein einfacher Pol bei $i\pi/2$. Nach kurzer Rechnung erhält man in Übereinstimmung mit [1]

$$f(\xi) = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2} \xi}. \quad (21)$$

Das tiefste Energieniveau ist dann durch das Integral

$$\frac{\varepsilon}{N} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{(1 + \xi^2) \cos \frac{\pi}{2} \xi}$$

gegeben. Der Integrand ist wiederum eine analytische und meromorphe Funktion. Die Pole liegen auf der imaginären Achse an den Stellen $z_n = (2n + 1)i$. $n = 0$ entspricht einem zweifachen Pol, alle übrigen sind einfach. Nach dem Residuensatz wird:

$$\frac{\varepsilon}{N} = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} a_{-1}^{(n)}$$

wobei $a_{-1}^{(n)}$ das Residuum an der Stelle $(2n + 1)i$ bezeichnet. Da

$$a_{-1}^{(0)} = -\frac{i}{2\pi}$$

und

$$a_{-1}^{(n)} = (-1)^n \frac{2i}{\pi \{1 - (2n + 1)^2\}}, \quad n \geq 1$$

ist, bekommt man:

$$\frac{\varepsilon}{N} = \frac{1}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1 - (2n + 1)^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \right\}$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} = \lg 2.$$

Daher finden wir für den tiefsten Eigenwert von A

$$E_0 = -2I\varepsilon = -2IN \lg 2 = -IN \cdot 1,386 \quad (22)$$

wiederum in Übereinstimmung mit [1]. Die strenge Berechnung der tiefsten Energie einer linearen Kette mit nur endlich vielen Gliedern zeigt übrigens, daß der in Gl. (22) angeführte Limeswert schon für eine recht geringe Gliederanzahl fast erreicht wird. So erhält man für $N = 10$, bzw. 12, $E_0 = 2IN \cdot 1,4031$, bzw. $E_0 = -2IN \cdot 1,3979$ ¹⁴.

§ 4. Die Energieverteilung in der Umgebung von E_0 .

Während die strenge Integration von Gl. (11 a) auf einfache Weise durch die FOURIERSche Integraltransformation gelingt, gilt dies leider nicht mehr für die Integralgleichung (14 a). Die im Integral von Gl. (14 a) auftretenden endlichen Grenzen $(-\xi_0, \xi_0)$ verhindern zunächst ein zu

¹⁴ Die tiefsten Energieniveaus von A wurden für 4-, 6-, 8- und 10-gliedrige Kette von HULTHÉN in [1] berechnet, während die Rechnung für $N = 12$ von den Verfassern durchgeführt wurde.

§ 3 analoges Vorgehen. Beschränkt man sich jedoch auf die Auffindung einer asymptotischen Lösung ($\sigma \ll 1$), so bereitet die Zurückführung von Gl. (14 a) auf eine Integralgleichung des Typus Gl. (16 a) keine Schwierigkeiten.

Wir benützen wieder die Abkürzungen Gl. (15 a) und (15 b) und bekommen an Stelle von Gl. (12 a):

$$g(\xi) = f(\xi, \xi_0) + \lambda \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} K(\xi - \eta) f(\eta, \xi_0) d\eta, \quad \lambda = \frac{2}{\pi}. \quad (23)$$

Die Wellenzahldichte $f(\xi, \xi_0)$ ist hier eine Funktion von ξ und ξ_0 ; für $\xi_0 = \infty$ geht $f(\xi, \xi_0)$ in

$$f(\xi, \xi_0 = \infty) = f(\xi) = \frac{1}{2 \cos(\pi/2) \xi}$$

über. Wir machen nunmehr den formalen Ansatz der Störungsrechnung

$$\bar{f} = f(\xi, \xi_0) = f(\xi) + \varphi(\xi, \xi_0) \quad (24 a)$$

und versuchen die Bestimmung der Störungsfunktion φ unter den Bedingungen

$$\xi_0 \gg 1 \quad (24 b)$$

und

$$\frac{|\varphi(\xi, \xi_0)|}{f(\xi)} \ll 1. \quad (24 c)$$

Die Berechtigung der in der Störungsrechnung üblichen Annahme (24 c) wird später durch die explizite Darstellung von $\varphi(\xi, \xi_0)$ erbracht.

Aus Gl. (16 a), (23) und (24 a) gewinnt man zunächst die Gleichung:

$$0 = \varphi(\xi, \xi_0) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) \varphi(\eta, \xi_0) d\eta - \lambda \left\{ \int_{-\infty}^{-\xi_0} K(\xi - \eta) \bar{f}(\eta) d\eta + \int_{+\xi_0}^{\infty} K(\xi - \eta) \bar{f}(\eta) d\eta \right\}$$

Mit der Abkürzung

$$\int_{-\infty}^{-\xi_0} K \bar{f} d\eta + \int_{+\xi_0}^{\infty} K \bar{f} d\eta = \int_{-1}^{+1} K(\xi - \eta) \bar{f} d\eta \quad (25)$$

erhält man weiter:

$$\lambda \left\{ \int_{-1}^{+1} K(\xi - \eta) f(\eta) d\eta + \int_{-1}^{+1} K(\xi - \eta) \varphi(\eta, \xi_0) d\eta \right\} = \varphi(\xi_0, \xi) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) \varphi(\eta, \xi_0) d\eta. \quad (26 a)$$

Infolge Gl. (24 c) darf man das zweite Integral der linken Seite von Gl. (26 a) gegenüber dem ersten vernachlässigen und wir erhalten eine lineare Integralgleichung

$$\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) d\eta = \varphi(\xi, \xi_0) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) \varphi(\eta, \xi_0) d\eta, \quad (26 \text{ b})$$

welche für genügend große ξ_0 mit beliebiger Genauigkeit die Funktion $\varphi(\xi, \xi_0)$ zu bestimmen gestattet.

Gl. (26 b) erlaubt die Anwendung der FOURIERSchen Integraltransformation und man bekommt wie früher, wenn noch

$$G(\xi, \xi_0) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) d\eta \quad (27)$$

gesetzt wird:

$$\hat{\varphi}(u, \xi_0) = \frac{\hat{G}(u, \xi_0)}{1 + \lambda \hat{K}(u)} \quad (28 \text{ a})$$

mit

$$\hat{G}(u, \xi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\xi, \xi_0) e^{-i u \xi} d\xi \quad (28 \text{ b})$$

und

$$\hat{K}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(v) e^{-i u v} dv \quad (28 \text{ c})$$

Die gesuchte Funktion

$$\varphi(\xi, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(u, \xi_0) e^{+i u \xi} du$$

folgt dann zu:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{G}(u, \xi_0)}{1 + \lambda \hat{K}(u)} e^{i u \xi} du \quad (28 \text{ d})$$

Wir berechnen zunächst $\hat{G}(u, \xi_0)$ ¹⁵; aus Gl. (28 b), (27 a) und (15 d) sowie Gl. (21) erhält man

$$\hat{G}(u, \xi_0) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) d\eta \right\} e^{-i u \xi} d\xi = \lambda (J_1 + J_2)$$

¹⁵ Die Integration von Gl. (27) zur expliziten Darstellung von $\hat{G}(\xi, \xi_0)$ führt auf komplexe Ei-Funktionen. Wie wir jedoch oben zeigen, ist die angeführte Integration zur Gewinnung von $\hat{G}(u, \xi_0)$ nicht notwendig.

mit

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\xi_0} K(\xi - \eta) f(\eta) e^{-iu\xi} d\xi d\eta, \\ J_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{+\xi_0}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) e^{-iu\xi} d\xi d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (28 e)$$

Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) f(\eta) d\eta$$

gleichmäßig konvergent ist¹⁶, darf die Integrationsfolge in Gl. (28 c) vertauscht werden; für J_1 und J_2 ergibt sich daraus:

$$J_1 = \int_{-\infty}^{-\xi_0} f(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) e^{-iu\xi} d\xi = \int_{\xi_0}^{\infty} f(-\eta) F(-\eta, u) d\eta, \quad (29 a)$$

$$J_2 = \int_{\xi_0}^{\infty} f(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} K(\xi - \eta) e^{-iu\xi} d\xi = \int_{\xi_0}^{\infty} f(\eta) F(\eta, u) d\eta \quad (29 b)$$

mit

$$F(\eta, u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iu\xi}}{4 + (\xi - \eta)^2} d\xi = e^{-iu\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iuv}}{4 + v^2} dv. \quad (29 c)$$

Nach Ausführung der Integration Gl. (29 c) erhält man:

$$F(\eta, u) = \frac{\pi}{2} e^{-iu\eta} \begin{cases} e^{-2u} & \text{für } u > 0 \\ e^{+2u} & \text{für } u < 0. \end{cases} \quad (29 d)$$

Damit finden wir für J_1 und J_2 :

$$J_1 = \frac{\pi}{4} \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{e^{+iu\eta}}{\cos \frac{\pi}{2} \eta} d\eta \cdot \begin{cases} e^{-2u} & (u > 0) \\ e^{+2u} & (u < 0), \end{cases}$$

¹⁶ Das Bestehen der gleichmäßigen Konvergenz ist streng genommen zur Vertauschbarkeit der Integrationsfolge nur dann hinreichend, wenn das äußere Integral endliche Grenzen besitzt. Ist dies wie in Gl. (28 c) nicht der Fall, so hat man zunächst das äußere Integral mit endlichen Grenzen ($-N$, $+N$) anzusetzen und den Grenzwert der Folge (für $N \rightarrow \infty$) zu untersuchen. Da in unserem Fall sogar die absolute Konvergenz gesichert ist, erscheint die Vertauschung gerechtfertigt.

$$J_2 = \frac{\pi}{4} \int_{\xi_0}^{\alpha} \frac{e^{-i u \eta}}{\cos \frac{\pi}{2} \eta} d\eta \cdot \begin{cases} e^{-2u} & (u > 0) \\ e^{+2u} & (u < 0). \end{cases}$$

Wir werten obige Integrale unter Berücksichtigung von Gl. (24 b) aus und bekommen nach elementarer Rechnung mit Hilfe von Gl. (28 e):

$$\hat{G}(u, \xi_0) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\xi_0 - 2u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)} \cdot \{\pi \cos u \xi_0 - 2u \sin u \xi_0\} & \text{für } u > 0, \\ \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\xi_0 + 2u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right)} \cdot \{\pi \cos u \xi_0 - 2u \sin u \xi_0\} & \text{für } u < 0. \end{cases} \quad (30)$$

Da wir $\hat{K}(u)$ aus Gl. (18 b) entnehmen können, bekommen wir unmittelbar für Gl. (28 a):

$$\hat{\varphi}(u, \xi_0) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}\xi_0} \frac{\{\pi \cos u \xi_0 - 2u \sin u \xi_0\}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} \cdot e^{-|u|}, \quad (-\infty < u < +\infty). \quad (31)$$

Demnach wird gemäß Gl. (31) und (28 d)

$$\varphi(\xi, \xi_0) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\pi}{2}\xi_0} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} \{\pi \cos u \xi_0 \cos u \xi - 2u \sin u \xi_0 \cos u \xi\} du. \quad (32)$$

Die aufgefundene Integraldarstellung der Störungsfunktion läßt sich durch einfache trigonometrische Umformungen in eine bequemere Gestalt bringen; wir erhalten:

$$\varphi(\xi, \xi_0) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\xi_0}}{4\pi} \{\Phi(\xi_0 + \xi) + \Phi(\xi_0 - \xi)\} \quad (33 a)$$

mit

$$\Phi(\xi_0 + \xi) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} \{\pi \cos(\xi_0 + \xi)u - 2u \sin(\xi_0 + \xi)u\} du, \quad (33 b)$$

$$\Phi(\xi_0 - \xi) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} \{\pi \cos(\xi_0 - \xi) u - 2 u \sin(\xi_0 - \xi) u\} du. \quad (33 c)$$

Die durch Gl. (33 b) und (33 c) eingeführten stetigen Funktionen Φ sind für alle Werte von ξ und ξ_0 nach oben beschränkt, so daß $\varphi(\xi, \xi_0)$ für $\xi_0 \gg 1$ und beliebigem ξ wie $e^{-\pi/2 \xi_0}$ gegen Null geht. Damit ist Gl. (24 c) und unser Approximationsprinzip gerechtfertigt.

Für die weitere Rechnung erweist sich die strenge Integration von Gl. (33 b), bzw. (33 c) als überflüssig, doch benötigen wir eine asymptotische Darstellung von $\Phi(\xi_0 + \xi)$ und $\Phi(\xi_0 - \xi)$ für große Werte von $|\xi_0 + \xi|$, bzw. $|\xi_0 - \xi|$. Man erhält¹⁷:

$$\Phi(\xi_0 \pm \xi) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{(\xi_0 \pm \xi)^2} + O\left[\frac{1}{(\xi_0 \pm \xi)^3}\right], \quad |\xi_0 \pm \xi| \gg 1. \quad (33 d)$$

Ferner ist der numerische Wert des folgenden Doppelintegrals von Interesse:

$$c_0 = \int_0^{\infty} \Phi(t) dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} \{\pi \cos u t - 2 u \sin u t\} du dt. \quad (34 a)$$

Bezeichnet man mit γ_0 das Integral

$$\gamma_0 = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|u|}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} du = 0,510, \quad (34 b)$$

so ist (s. Math. Anhang)

$$c_0 = 2 - \gamma_0. \quad (34 c)$$

Mit Hilfe von Gl. (14 b), (33) und (34) berechnet man zunächst das Energiespektrum als Funktion von ξ_0 :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon}{N} &= \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{f(\xi, \xi_0)}{1 + \xi^2} d\xi - \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{f(\xi, \infty)}{1 + \xi^2} d\xi + \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{\varphi(\xi, \xi_0)}{1 + \xi^2} d\xi = \\ &= \lg 2 - \int_{-1}^{+1} \frac{f(\xi, \infty)}{1 + \xi^2} d\xi + \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{\varphi(\xi, \xi_0)}{1 + \xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (35)$$

Wir haben die in Gl. (35) auftretenden Integrale auszuwerten. Für das erste Integral auf der linken Seite erhalten wir unmittelbar nach Ausführung einer partiellen Integration und mit Berücksichtigung von Gl. (24 b)

¹⁷ Bezüglich der Ableitung verweisen wir auf den Mathematischen Anhang § 6.

$$\int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{\varphi(\xi, \infty)}{1 + \xi^2} d\xi = \int_{-\xi_0}^{\xi_0} \frac{d\xi}{(1 + \xi)^2 \cos \frac{\pi}{2} \xi} \frac{4}{\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{1 + \xi_0^2} (\xi_0 \gg 1) \quad (36 a)$$

Das zweite Integral wird:

$$\begin{aligned} & \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{\varphi(\xi, \xi_0)}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{4\pi} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \{\Phi(\xi_0 + \xi) + \Phi(\xi_0 - \xi)\} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \\ & = \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{2\pi} \int_0^{2\xi_0} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} - r(2\xi_0) \right\} \end{aligned}$$

mit

$$r(2\xi_0) = \int_{2\xi_0}^{\infty} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2}.$$

Da wir nur Glieder bis zur Größenordnung $\frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{\xi_0^2}$ zu berücksichtigen

brauchen und $r(2\xi_0)$ mindestens die Größenordnung $\frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{\xi_0^4}$ besitzt, also zu vernachlässigen ist, bleibt:

$$\int_{-\xi_0}^{+\xi_0} \frac{\varphi(\xi, \xi_0)}{1 + \xi^2} d\xi = \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} \quad (36 b)$$

Zur Berechnung obigen Integrales beachten wir nun, daß $\Phi(t)$ für $t \rightarrow \infty$, wie $1/t^2$ verschwindet und nur in einer endlichen Umgebung $B_1 = (0, p_1)$ von $t = 0$ zur Integration einen wesentlichen Beitrag leistet. Dabei ist die Schranke p_1 *unabhängig* von ξ_0 . Das gleiche gilt von der Funktion

$$\frac{1}{1 + (t - \xi_0)^2}$$

in dem Bereich $B_2 = (-p_2 + \xi_0, p_2 + \xi_0)$. Wir betten nunmehr B_1 und B_2 in die Intervalle \bar{B}_1, \bar{B}_2 ein und setzen dazu

$$\bar{p}_i = \alpha_i^{(0)} \xi_0 \quad \text{mit} \quad \alpha_i^{(0)} \ll 1, \quad (i = 1, 2).$$

Die $\alpha_i^{(0)}$ sind von ξ_0 unabhängige feste Zahlen, welche genügend klein gewählt werden. Ist ξ_0 sehr groß, so gilt

$$B_1 \subset \bar{B}_1 \quad \text{und} \quad B_2 \subset \bar{B}_2.$$

Die Resonanzbereiche \bar{B}_1 und \bar{B}_2 rücken dabei beliebig weit auseinander, während die Intervallängen prop. ξ_0 zunehmen und mit ξ_0 ebenfalls nach ∞ streben. Es ist dann die folgende Zerlegung möglich¹⁸ (s. Abb. 1):

$$\int_0^{\infty} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} = \int_0^{\bar{p}_1} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} + \int_{\xi_0 - \bar{p}_2}^{\xi_0 + \bar{p}_2} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} + O\left[\frac{1}{\xi_0^3}\right].$$

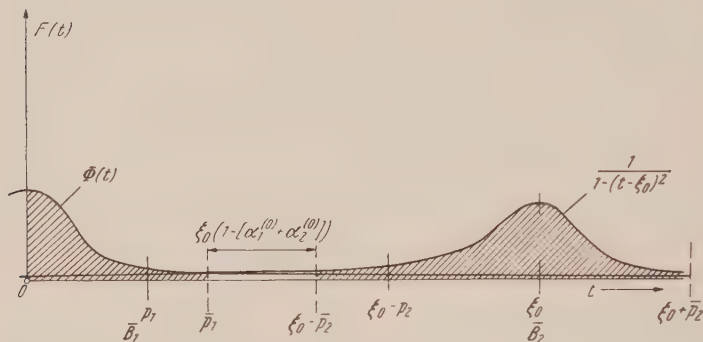


Abb. 1. Schematische Ansicht der Funktionen $\Phi(t)$ sowie $\frac{1}{1 + (t - \xi_0)^2}$. Die Resonanzbereiche B_1 und B_2 werden bei genügend großem ξ_0 von \bar{B}_1 und \bar{B}_2 überdeckt. Außerhalb \bar{B}_1 und \bar{B}_2 verschwindet der Integrand $\frac{\Phi(t)}{1 + (t - \xi_0)^2}$ wie $\frac{1}{\xi_0^4}$.

Wir wenden partielle Integration an und erhalten weiter

$$\begin{aligned} & \int_0^{\bar{p}_1} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} = \left\{ \frac{1}{1 + (t - \xi_0)^2} \int_0^x \Phi(t) dt \right\} \bigg|_0^{\bar{p}_1} + O_1 \left[\frac{1}{\xi_0^3} \right] \\ & = \frac{1}{\xi_0^2} \int_0^{\bar{p}_1} \Phi(t) dt + O_2 \left[\frac{1}{\xi_0^2} \right] = \frac{1}{\xi_0^2} \int_0^{\infty} \Phi(t) dt + O_3 \left[\frac{1}{\xi_0^3} \right], \end{aligned}$$

¹⁸ Außerhalb der Gebiete \bar{B}_1 und \bar{B}_2 stellt also der Integrand von Gl. (36 b) nur Beiträge die klein von höherer Ordnung sind, das heißt Integrale

$$\int_{\bar{p}_1}^{\xi_0 - \bar{p}_2} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} \quad \text{und} \quad \int_{\xi_0 + \bar{p}_2}^{\infty} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2}$$

werden, wie eine einfache Abschätzung mit Hilfe von Gl. (33 b) zeigt, von mindestens der Ordnung $1/\xi_0^3$ klein. Es gelten dabei die folgenden Ungleichungen

$$\begin{cases} |p_i - \xi_0| = \xi_0 |1 - \alpha_i^{(0)}| \gg 1 \\ \alpha_i^{(0)} \xi_0 \gg 1 \end{cases}$$

für genügend große ξ_0 .

wobei wir $|\vec{p}_1 - \xi_0| = \xi_0 |1 - \alpha_1^{(0)}| \approx \xi_0 \gg 1$ berücksichtigen. Mit Gl. (24 a) finden wir:

$$\int_0^{p_1} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} = \frac{c_0}{\xi_0^2} + O\left[\frac{1}{\xi_0^3}\right]. \quad (36 d)$$

Auf die gleiche Weise behandeln wir das zweite Integral in der Zerlegung Gl. (36 c); wir führen im Integranden den asymptotischen Ausdruck Gl. (33 f) ein und bekommen:

$$\int_{\xi_0 - p_2}^{\xi_0 + p_2} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} = \frac{4}{\pi} \int_{\xi_0 - p_2}^{\xi_0 + p_2} \frac{dt}{t^2 \{1 + (t - \xi_0)^2\}} + O\left[\frac{1}{\xi_0^3}\right].$$

Nach Ausführung einer partiellen Integration kommt schließlich, wobei wieder $\xi_0 \gg p_2 \gg 1$ gesetzt werden darf:

$$\int_{\xi_0 - p_2}^{\xi_0 + p_2} \frac{\Phi(t) dt}{1 + (t - \xi_0)^2} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\xi_0^2} \int_{-p_2}^{+p_2} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{4}{\xi_0^2} + O\left[\frac{1}{\xi_0^3}\right]. \quad (36 e)$$

Damit ist die gesuchte Energieverteilung in der Umgebung von E_0 bestimmt. Aus Gl. (35) und den Gl. (36 a), (36 b), (36 d) und (36 e) folgt:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{N} &= \lg 2 - \frac{K_0}{\pi} \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{\xi_0^2} \\ K_0 &= 2 - \frac{c_0}{2} = 1 + \frac{\gamma_0}{2} = 1,25. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Wir haben noch ε als Funktion von σ darzustellen und gehen dazu auf Gl. (14 c) zurück; wir erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} f(\xi, \xi_0) d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \infty) d\xi - \int_{-1}^{+1} f(\xi, \infty) d\xi + \\ &+ \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0}}{2\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \Phi(t) dt - \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi_0} \right\} = 1 - \sigma, \end{aligned} \quad (38 a)$$

wobei wir Gl. (33 a) und (33 f) verwendet haben. Nun ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \infty) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{2 \cos \frac{\pi}{2} \xi} = 1$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \infty) d\xi = \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\cos \frac{\pi}{2} \xi} = \frac{4}{\pi} e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0},$$

so daß Gl. (38 a) mit Hilfe von Gl. (34 a) in

$$e^{-\frac{\pi}{2} \xi_0} \left\{ (8 - c_0) + \frac{2}{\pi} \frac{1}{\xi_0} \right\} = \sigma \quad (38 b)$$

übergeht. Mit der Abkürzung

$$8 - c_0 = c_0^* = 6,51 \quad (38 c)$$

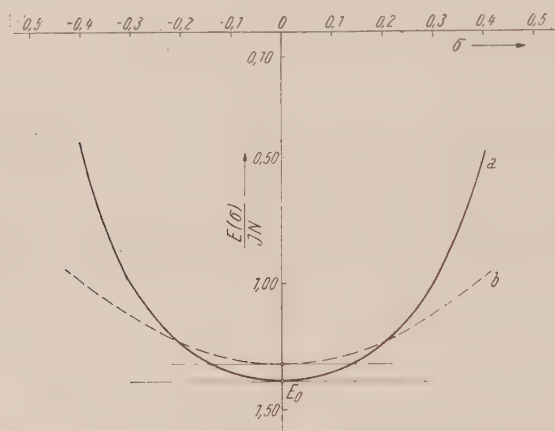


Abb. 2. Spektrale Verteilung der Energie in der Nähe von $E = E_0$. Die Kurve *a* ergibt sich aus Gl. (39 a) während die Kurve *b* der Energieverteilung nach HULTHÉN (statistische Methode) entspricht.

bekommen wir aus Gl. (38 b)

$$\xi_0 = \frac{2}{\pi} \lg \left(\frac{2\pi}{c_0^*} \sigma \right) \quad (38 d)$$

den Zusammenhang zwischen ξ_0 und σ . Bei Bildung der Umkehrfunktion durften wir in Gl. (38 b) $1/\xi_0$ gegen $(8 - c_0)$ vernachlässigen.

Schließlich folgt durch Einsetzen von Gl. (38 d) in Gl. (37) das Energiespektrum als Funktion von σ zu:

$$E(\sigma) = -2 J \varepsilon(\sigma) = -2 J N \left\{ \lg 2 - c \cdot \frac{\sigma}{\lg^2 \sigma} \right\} \quad (39 a)$$

mit der Konstanten

$$c = \frac{\pi^2}{2} \frac{K_0}{c_0^*} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{2 + \gamma_0}{6 + \gamma_0} = 0,95. \quad (39 b)$$

Zum Vergleich führen wir die analoge Verteilung an, welche HULTHÉN nach der statistischen Methode in der Näherung der ersten Stufe findet:

$$E(\sigma) = -JN \left\{ \frac{17 + 7\sqrt{7}}{27} - \frac{28 + 11\sqrt{7}}{27} \cdot \sigma^2 \right\} = -NJ \{1,316 - 2,12 \cdot \sigma^2\}. \quad (40)$$

Für $\sigma = 0$ bekommt man in Gl. (39) den exakten Wert $E_0 = -2JN \lg 2$, während $E(0)$ nach Gl. (40) um etwa 5% höher liegt. In beiden Fällen mündet die Kurve $E = E(\sigma)$ horizontal in E_0 ein. Einen wesentlichen Unterschied weist jedoch die 2-te Ableitung auf: In Gl. (39) erhält man für $E''(\sigma = 0) = \infty$, hingegen bleibt $E''(0)$ nach Gl. (40) endlich. Daher gestattet Gl. (39) für $\sigma = 0$ keine quadratische Approximation, woraus sich das von [1] prinzipiell verschiedene Verhalten der Nullpunktssuszeptibilität ergibt. Die letzten Endes entscheidende Singularität in der zweiten Ableitung von E_0 hat wiederum ihre Ursache im Auftreten des Faktors $e^{-\frac{\pi}{2}\xi_0}$ neben rationalen Termen. Es ist leicht einzusehen, daß auch bei Hinzunahme von weiteren Gliedern der asymptotischen Lösung sich an diesem Umstande nichts ändern würde.

§ 5. Die Nullpunktssuszeptibilität.

Zur Untersuchung des magnetischen Verhaltens der Kette, schalten wir in Richtung der negativen z -Achse ein Magnetfeld

$$\vec{H} = -H\mathbf{e}_z \quad (H \geq 0)$$

ein; dieses wird die Anzahl der $+$ Spine verkleinern, da klassisch gesprochen, das so gewählte H -Feld die Tendenz aufweist, die Spinvektoren in Richtung der negativen z -Achse herüberzuklappen. Dies steht im Einklang mit unserer Forderung $\sigma \geq 0$. Der Operator M hat demnach die Gestalt:

$$M = -2\mu_B \left(\vec{H}, \sum_{k=1}^N \vec{\sigma}_k \right) = +\mu_B H \sum_{k=1}^N \zeta_k.$$

Dabei bedeutet μ_B das BOHRSCHE Magneton und ζ_k die doppelte z -Komponente der k -ten PAULISCHEN Spinvektormatrix. $\sum_k \zeta_k$ ist mit A

vertauschbar und jede Funktion aus R mit der Quantenzahl M_s ist Eigenfunktion des Operators M zum Eigenwert $2M_s$. Insbesondere gilt dies für alle Eigenfunktionen $\psi(n_1, \dots, n_r)$ von A . Die Eigenwerte von M sind wegen $r = N/2(1 - \sigma)$ durch

$$2M_s = 2r - N = -N\sigma$$

gegeben.

Die spektrale Verteilung des HAMILTON-Operators in der Umgebung von $\sigma = 0$ lautet daher:

$$H(\sigma) = -2N J \left\{ \lg 2 - c \frac{\sigma}{\lg^2 \sigma} \right\} - N \mu_B H \sigma. \quad (40)$$

Nun ist die Suszeptibilität χ durch

$$\chi = \frac{J}{H} \quad \text{mit} \quad J = N \mu_B \sigma \quad (41)$$

definiert, wobei J das magnetische Moment des betrachteten Körpers in einem bestimmten Gleichgewichtszustande bedeutet. In unserem Fall ist dieser Gleichgewichtszustand durch das Minimum der Gesamtenergie Gl. (40) gegeben und durch eine bestimmte Anzahl $N \sigma$ nicht-abgebundener Minusspine gekennzeichnet. Aus

$$\frac{1}{N} \frac{dH}{d\sigma} = \frac{2cI}{\lg^2 \sigma_0} \left(1 - \frac{1}{\lg \sigma_0} \right) - \mu_B H = 0$$

findet man

$$\sigma_0 = c e^{-\sqrt{\frac{2cI}{\mu_B H}}} \quad (42)$$

In Verbindung mit Gl. (41) erhalten wir daher

$$\chi = \frac{J}{H} = \frac{N \mu_B}{H} e^{-\sqrt{\frac{2cI}{\mu_B H}}} \quad (43)$$

mit

$$c = \frac{\pi^2 2 + \gamma_0}{4 \cdot 6 + \gamma_0}$$

wobei γ_0 durch Gl. (34) bestimmt ist.

Die Suszeptibilität ist also gemäß Gl. (43) eine monoton ansteigende Funktion von H und verschwindet für $H = 0$. Ebenso ist das magnetische Moment J eine nichtlineare und mit H monoton ansteigende Funktion, während in [1] J proportional der Feldstärke ausfällt.

Physikalisch wird dieses Verhalten verständlich, wenn man bedenkt, daß durch den Umklapprozeß der Spinvektoren in die Feldrichtung immer weniger Spinvektoren zur mittleren Bindungsenergie beitragen und die Ausrichtung der Spine bezogen auf die Zunahme des H -Feldes daher immer leichter erfolgen kann.

Bezüglich des Gültigkeitsbereiches von Gl. (43) ist zu sagen, daß unsere Formel im Sinne ihrer asymptotischen Herleitung auf sehr kleine Feldstärken H beschränkt bleibt; wir müssen also

$$\sqrt{\frac{2cI}{\mu_B H}} \gg 1$$

voraussetzen.

§ 6. Mathematischer Anhang.

Zunächst leiten wir eine asymptotische Darstellung von $\Phi(t)$ für $t \gg 1$ ab und gehen dazu von der Integraldarstellung Gl. (33 b) aus; diese lautet:

$$\Phi(t) = \int_0^x f(u) \{ \pi \cos t u - 2 u \sin t u \} du = \pi \Phi_1(t) - \Phi_2(t) \quad (44 a)$$

mit

$$f(u) = \frac{e^{-u}}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u}. \quad (44 b)$$

Wie wir noch zeigen, genügt es allein, das Integral

$$\Phi_1(t) = \int_0^\infty f(u) \cos t u du \quad (44 c)$$

für große t -Werte zu untersuchen. Dazu zerlegt man das Integrationsintervall $(0, \infty)$ in die Teilintervalle

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n \left(u_n = \frac{n\pi}{t}, u_{n+1} = \frac{(n+1)\pi}{t} \right)$$

und führt die Integration in jedem Δu_n gesondert aus, wobei $f(u)$ durch die Tangente linear approximiert werden darf, da mit wachsendem t , Δu_n beliebig klein ausfällt. Nach kurzer Rechnung findet man

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{\frac{n\pi}{t}}^{\frac{(n+1)\pi}{t}} f(u) \cos t u du = (-1)^{n+1} \frac{2}{t^2} f' \left(\frac{n\pi}{t} \right) + O \left[\frac{1}{t^3} \right] = \\ &= (-1)^n \frac{2}{\pi^2 t^2} \frac{1}{\left[\left(\frac{n}{t} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{n\pi}{t}} + \frac{2 n e^{-\frac{n\pi}{t}}}{t \pi \left[\left(\frac{n}{t} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \cos \frac{n\pi}{t}} \right\} + O \left[\frac{1}{t^3} \right]. \end{aligned}$$

Wir bilden die Summe $\sum I_n$ und erhalten:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\pi^2 t^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\left[\left(\frac{n}{t} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{n\pi}{t} \right)} + \frac{2 n e^{-\frac{n\pi}{t}}}{t \pi \left[\left(\frac{n}{t} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \cos \frac{n\pi}{t}} \right\} = \\ &= \frac{2}{\pi^2 t^2} \{ \Sigma(I) + \Sigma(II) \}. \quad (45 b) \end{aligned}$$

Die in Gl. (45 b) auftretenden Summen werden im folgenden durch Integrale dargestellt, woraus sich auch die Relation

$$\frac{\Sigma(II)}{\Sigma(I)} = O\left[\frac{1}{t}\right]$$

ergibt. Für unsere asymptotische Darstellung ist also nur die Summe $\Sigma(I)$ maßgebend. Zerlegt man in Gl. (45 b) $\Sigma(I)$ in gerade und ungerade Terme so kommt:

$$\begin{aligned} \Sigma(I) &= \Sigma(I') - \Sigma(I'') = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\left[\left(\frac{2n}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cos^2\left(\frac{2n\pi}{t}\right)} - \frac{1}{\left[\left(\frac{2n+1}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cos^2\left(\frac{2n+1}{t}\pi\right)} \right\}. \end{aligned} \quad (46 \text{ a})$$

Nun gilt asymptotisch:

$$\Sigma(I') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{2n}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cos^2\left(\frac{2n\pi}{t}\right)} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cos^2\left(\frac{2x\pi}{t}\right)}, \quad (46 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} \Sigma(I'') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(\frac{2n+1}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cos^2\left(\frac{2n+1}{t}\pi\right)} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left[\left(\frac{2x+1}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right] \cos^2\left(\frac{2x+1}{t}\pi\right)}. \end{aligned} \quad (46 \text{ c})$$

Nach Ausführung einer linearen Substitution in den Integralen Gl. (46 b), bzw. (46 c) mittels

$$\frac{2x}{t} = y, \quad \text{bzw.} \quad \frac{(2x+1)}{t} = y$$

finden wir:

$$\Sigma(I) = \Sigma(I') - \Sigma(I'') = \frac{t}{2} \int_0^{1/t} \frac{dy}{\left[y^2 + \frac{1}{4}\right] \cos^2 y}.$$

Wegen $1/t \ll 1$ läßt sich obiges Integral sofort auswerten und man erhält

$$\int_0^\infty \frac{e^{-u} \cos t u}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u} du = \frac{2}{\pi^2 t^2} \Sigma(I) - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{t^2} \therefore O\left|\frac{1}{t^3}\right|. \tag{47}$$

In Gl. (46 b), bzw. (46 c) wurden die linker Hand auftretenden Treppenkurven T_1 , T_2 durch zwei glatte Kurven g_1 und g_2 ersetzt. Der dabei auftretende Fehler ist, wie eine Abschätzung sofort ergibt, von der Größenordnung $1/t^2$. Abb. 3 zeigt schematisch den Verlauf von T_1 , T_2 , bzw. g_1 , g_2 . Man erkennt unmittelbar die Flächengleichheit, der durch die Subtraktion von $\Sigma(I')$ und $\Sigma(I'')$ entstehenden schraffierten Rechtecke (1, 2, 3, 4) mit den Parallelepiped (1', 2', 3', 4'). Daraus folgt dann die Größenordnung des Restgliedes der asymptotischen Formel (47) zu $1/t^3$.

Auf ähnliche Weise behandelt man die Summe $\Sigma(II)$; es gilt:

$$\Sigma(II) = \Sigma(II') + \Sigma(II'')$$

mit

$$\begin{aligned} \Sigma(II') &= \frac{2}{\pi t} \sum_0^\infty \frac{2 n e^{-\frac{2 n \pi}{t}}}{\left[\left(\frac{2 n}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^2 \cos \frac{2 n \pi}{t}} \\ &= \frac{2}{\pi t} \int_0^\infty \frac{2 x e^{-\frac{2 x \pi}{t}} dx}{\left[\left(\frac{2 x}{t}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]^2 \cos \frac{2 \pi}{t} x} \end{aligned}$$

und

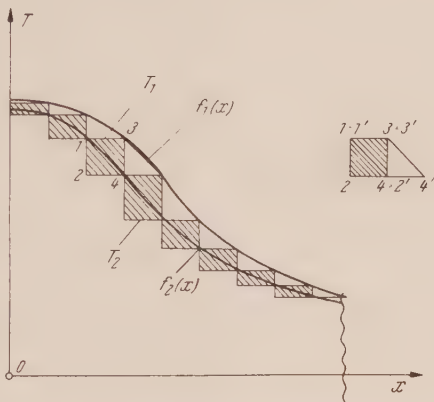


Abb. 3. Schematische Ansicht der Treppenkurven T_1 und T_2 nach Gl. (46 b) und (46 c). Die schraffierte Differenzfläche stellt dann $\Sigma(I) = \Sigma(I') - \Sigma(I'')$ dar. Die glatten Kurven f_1 und f_2 approximieren T_1 und T_2 in der Weise, daß

$$\int_0^\infty f_1 dt - \int_0^\infty f_2 dt$$

die Summe $\Sigma(I)$ bis auf ein Restglied der Ordnung $1/t^3$ wiedergibt.

$$\begin{aligned}\Sigma (II'') &= \frac{2}{\pi t} \sum_0^{\infty} \frac{(2n+1) e^{-\frac{2n+1}{t} \pi}}{\left[\left(\frac{2n+1}{t} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]^2 \cos \frac{(2n+1)}{t} \pi} \\ &= \frac{2}{\pi t} \int_0^{\infty} \frac{(2x+1) e^{-\frac{(2x+1)}{t} \pi} dx}{\left[\left(\frac{2x+1}{t} \right)^2 + \frac{1}{4} \right]^2 \cos \frac{(2x+1)}{t} \pi}.\end{aligned}$$

Daraus bekommt man analog wie früher:

$$\frac{2}{\pi^2 t^2} \Sigma (II) = \frac{16}{(\pi t)^3} + O \left[\frac{1}{t^4} \right]. \quad (48)$$

Zur Berechnung von

$$\Phi_2(t) = 2 \int_0^{\infty} f(u) u \sin t u du \quad (49 a)$$

beachten wir die gleichmäßige Konvergenz des Integrales

$$\int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \{ f(u) u \sin t u \} du$$

und die Stetigkeit des Integranden; dann gilt:

$$\Phi_2(t) = -2 \frac{d}{dt} \Phi_1(t) = \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{t^3} + O \left[\frac{1}{t^4} \right] \quad (49 b)$$

Aus Gl. (47) und (48) sowie (49 b) erhält man unmittelbar die in Gl. 33 f) angeführte Formel:

$$\Phi(t) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{t^2} + O \left[\frac{1}{t^3} \right]. \quad (50)$$

Die Berechnung von

$$c_0 = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(u) \{ \pi \cos u t - 2 u \sin u t \} du dt = \pi I_1 - I_2$$

gelingt am einfachsten mit Hilfe von Gl. (50). Wir beginnen mit I_1 ; zunächst ist:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^{\infty} f(u) \frac{\sin t u}{u} du \right\} dt = \left\{ \int_0^{\infty} f(u) \frac{\sin u t}{u} du \right\} \Big|_{t=0}^{t=\infty}. \quad (51 a)$$

Auf die Berechtigung der vorgenommenen Vertauschung von d/dt mit dem inneren Integral gehen wir weiter unten ein.

Nun gilt sicherlich

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} f(u) \frac{\sin t u}{u} du = 0, \quad (51 b)$$

da im Bereiche $0 \leq t < T$ (T – beliebig große, aber endliche Schranke) der Integrand von Gl. (51 b) gleichmäßig integrierbar ist.

Den Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ finden wir folgendermaßen:

Wir zerlegen

$$\int_0^{\infty} f(u) \frac{\sin t u}{u} du$$

in die Summe

$$\int_0^{\varepsilon} f(u) \frac{\sin t u}{u} du + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(u) \frac{\sin t u}{u} du = I_1' + I_2' \quad (\varepsilon > 0).$$

Nun ist analog zu den vorhergegangenen asymptotischen Entwicklungen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon}^{\infty} f(u) \frac{\sin t u}{u} du = 0,$$

so daß noch $\lim_{t \rightarrow \infty} I_1'$ zu berechnen bleibt. Wählt man ε genügend klein, so wird

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} f(u) \frac{\sin t u}{u} du = \frac{4}{\pi^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin t u}{u} du = \frac{2}{\pi}. \quad (51 c)$$

Der Nachweis der in Gl. (51 a) vorgenommenen Vertauschung ist erbracht, wenn die Limesrelation

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\int_0^{\varepsilon} f(u) \frac{\sin t u}{u} du \right] - \int_0^{\varepsilon} \frac{d}{dt} \left[f(u) \frac{\sin t u}{u} \right] du \right\} = 0 \quad (51 d)$$

für $t \gg T$ erfüllt ist. Es gilt aber:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} f(u) \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin t u}{u} \right] du = f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left. \frac{\sin t u}{t} \right|_0^{\varepsilon} = 0$$

und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_0^{\varepsilon} f(u) \frac{\sin t u}{u} du = f(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \int_0^{\varepsilon} \frac{\sin t u}{u} du.$$

Da $\frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\sin t u}{u} du$ für $t \rightarrow \infty$ nach Null strebt, ist damit Gl. (51 d) bewiesen. Mit Gl. (51 a), (51 b), (51 c) und (51 d) erhalten wir:

$$I_1 = \frac{2}{\pi}. \quad (52)$$

Die zu Gl. (51 a) analoge Umformung liefert für I_2 :

$$I_2 = 2 \int_0^\infty \int_0^\infty f(u) u \sin t u du dt = - \left\{ \int_0^\infty f(u) \cos t u du \right\} \Big|_{t=0}^{t=\infty}.$$

Hier ist die Vertauschung von d/dt mit dem inneren Integral ohne weiteres erlaubt, da es sich um einen stetigen und gleichmäßigen integrierbaren Integranden für alle Werte von t handelt.

Wegen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty f(u) \cos t u du = \frac{8}{\pi^2} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} = 0 \quad (53 a)$$

bleibt noch die Auswertung von

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2 \int_0^\infty f(u) \cos t u du = 2 \int_0^\infty f(u) du \quad (53 b)$$

übrig. Zunächst schreiben wir statt Gl. (53 b) das Integral in der Form

$$\gamma_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|u|} du}{\left(u^2 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cos u}$$

und approximieren $e^{-|u|}$ durch eine analytische Funktion. Dies führt zum Ansatz

$$e^{-|u|} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_\nu}{\cos \nu u},$$

wobei die α_ν nach der Methode der kleinsten Quadrate zu ermitteln sind. Bricht man die Reihe mit dem dritten Gliede ab, so erhält man aus

$$\int_0^\infty \left\{ e^{-u} - \frac{\alpha_1}{\cos u} - \frac{\alpha_2}{\cos 2u} \right\}^2 du = \text{Min.}$$

die Koeffizienten

$$\alpha_1 = 0,32, \quad \alpha_2 = 0,59.$$

Die Residuenmethode liefert dann die folgende Reihendarstellung:

$$\begin{aligned} \gamma_0 = & a_1 \left\{ 2 \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{3} \right) - \frac{32}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2\nu+1}{1-(2\nu+1)^2} \right\} + \\ & + a_2 \left\{ -\frac{2}{\pi} + \frac{8}{\pi} \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{1-(2\nu+1)^2} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{4}(4\nu+1)^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(4\nu+3)^2} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Daraus erhält man $\gamma_0 = 0,480$. Durch Weiterführung dieses Verfahrens kann man die Genauigkeit beliebig vergrößern. Der auf drei Dezimalen genaue Wert von γ_0 lautet:

$$\gamma_0 = 0,510.$$

Aus Gl. (51 c) und (53 d) ist dann die Konstante c_0 mit

$$c_0 = 2 - \gamma_0 = 1,49$$

bestimmt.

Herrn cand. phil. H. Stippel, welcher uns bei der Durchführung von Kontrollrechnungen unterstützt hat, haben wir besonders zu danken.

Zur quantitativen Theorie der radioaktiven α -Emission.

Von

Johann Herrmann und Theodor Sexl.

Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

Mit 3 Abbildungen.

(Eingelangt am 24. Juni 1952.)

Die quantitative Theorie der radioaktiven α -Emission wird für den Fall nichtverschwindender Azimutalquantenzahlen ($l \neq 0$) nach dem Rechenverfahren der komplexen Eigenwerte exakt entwickelt. Zu diesem Zweck mußten für die Integrale der LAPLACESchen Differentialgleichung des Problems Integraldarstellungen aufgestellt und aus ihnen nach der Sattelpunktmethode asymptotische Darstellungen berechnet werden. Die Auflösung der komplexen Eigenwertgleichung des Problems führt zu einer Formel für die Zerfallskonstante λ , welche eine explizite Abhängigkeit von der Azimutalquantenzahl nur in der ε -Potenz, nicht aber im „Vorfaktor“ enthält.

A. Ansatz des Problems.

Man kann den α -Zerfall näherungsweise als Einkörperproblem behandeln [1, S. 75]. Dann hat man von der zeitabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\Delta u - \frac{2\mu}{\hbar^2} V u + i \frac{\mu}{\hbar} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

auszugehen.

Hier ist V das wechselseitige Potential zwischen dem austretenden α -Teilchen und dem Restkern. Es soll folgende Gestalt haben

$$V = \begin{cases} U = \text{const} & \text{für } r < r_0, \\ \frac{(Z-Z')Z'e^2}{r} & \text{für } r > r_0, \end{cases} \quad (2)$$

wobei r der Abstand der Teilchen, r_0 die Reichweite der Kernkräfte ist. Die Ladung des emittierten Teilchens ist $Z'e$ und die des Restkerns $(Z-Z')e$. Die reduzierte Masse des Systems werde μ genannt.

Da also das Potential von der Zeit nicht abhängen soll, führt der Ansatz

$$u = \psi(x, y, z) e^{-\frac{Et}{\hbar}}$$

zur zeitunabhängigen SCHRÖDINGER-Gleichung

$$\Delta \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V) \psi = 0. \quad (3)$$

In bekannter Weise [1, S. 82] hat man nun die Eigenwerte der Energie komplex anzusetzen

$$E = E_r - i \frac{\hbar}{2} \lambda; \quad (4)$$

denn dann wird

$$u = \psi e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = \psi e^{-i \frac{E_r}{\hbar} t} e^{-\frac{\lambda}{2} t},$$

und die Wahrscheinlichkeitsdichte der emittierten Teilchen $|u|^2$ nimmt wie $e^{-\lambda t}$ ab. Dieser Ansatz führt also auf das aus den experimentellen Ergebnissen bekannte radioaktive Zerfallsgesetz. λ ist die zu bestimmende Zerfallskonstante.

Im folgenden wird davon Gebrauch gemacht, daß der Imaginärteil der Energie sehr viel kleiner als der Realteil ist. Denn für die Zerfallenergie gilt $E_r \doteq 10^{-6}$ erg, für die Zerfallskonstante $\lambda \doteq 10^5 \text{ sec}^{-1}$ bis $10^{-18} \text{ sec}^{-1}$ und daher gilt

$$\frac{1}{2} \hbar \lambda = E_i \ll E_r.$$

Da das Potential kugelsymmetrisch ist, führt man räumliche Polarkoordinaten ein; der Separationsansatz

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \chi(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi),$$

wo $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ die LAPLACESchen Kugelflächenfunktionen sind, führt zur Differentialgleichung für $\chi(r)$

$$\frac{d^2 \chi(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} \right) \chi(r) = 0. \quad (5)$$

Im Innenraum $r < r_0$ gilt $V = U = \text{const.}$ Die Lösungen von Gl. (5) sind dann [1, S. 76]

$$\chi_i(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E-U)} r J_{l+1/2} \left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E-U)} r \right), \quad (6)$$

wenn $J_{l+1/2}$ die BESSELSchen Funktionen mit halbganzen Indizes $l + 1/2$ sind.

Im Außenraum $r > r_0$ gilt $V = \frac{(Z - Z') Z' e^2}{r}$. Führt man die

dimensionslose Variable $x = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu E} r$ ein und setzt

$$\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{E}} (Z - Z') Z' e^2,$$

so wird Gl. (5) transformiert in

$$\frac{d^2 \chi(x)}{dx^2} + \left(1 - \frac{\kappa}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right) \chi(x) = 0. \quad (7)$$

Dadurch, daß E komplex vorausgesetzt wird, ist sowohl κ als auch die Wellenzahl $k = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar}$ und $x = kr$ komplex. Die Imaginärteile der angeführten Größen sind alle sehr klein. Mit den bekannten experimentellen Werten wird [3, S. 168; 4, S. 866]

$$E = E_r + i E_i = \frac{\mu v^2}{2} - i \frac{\hbar}{2} \lambda, \quad (8a)$$

$$k = k_r + i k_i = \frac{\sqrt{2\mu E_r}}{\hbar} \left(1 - i \frac{\hbar \lambda}{4 E_r}\right) = \frac{\mu v}{\hbar} - i \frac{\lambda}{2 v}. \quad (8b)$$

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_r + i \kappa_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{2\mu}{E_r}} V r \left(1 + \frac{\hbar \lambda}{4 E_r}\right) = \\ &= \frac{2(Z - Z') Z' e^2}{\hbar v} + i \frac{\lambda}{2 v} \frac{(Z - Z') Z' e^2}{E_r} = 50 + i 10^{-18}, \end{aligned} \quad (8c)$$

$$x = x_r + i x_i = k_r r - i \frac{\lambda}{2 v} r = 10 - i 10^{-18}, \quad (8d)$$

$$\frac{\kappa_r}{\kappa_r} \frac{k_r r}{\kappa_r} = \frac{E_r}{V}. \quad (8e)$$

In der Differentialgleichung (7) können daher Veränderliche x und Parameter κ als reell betrachtet werden. Beide sind sehr viel größer als 1. Man benötigt also asymptotische Näherungen der Integrale der Differentialgleichung (7) mit gleichzeitig groß werdenden x und κ .

Für das vorliegende Problem gilt [1, S. 77]

$$0 < E_r < V(r_0). \quad (9)$$

Dem physikalischen Charakter der Aufgabe gemäß, hat man also eine Lösung im Außenraum zu suchen, die im Unendlichen eine weglaufende Welle darstellt.

Die Substitution

$$\chi(x) = x^{-l} y(x) \quad (10)$$

führt zu einer LAPLACESchen Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2l}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\kappa}{x}\right) y = 0, \quad (11)$$

die ein Spezialfall der allgemeinen Gestalt ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\delta_0 + \frac{\delta_1}{x}\right) \frac{dy}{dx} + \left(\epsilon_0 + \frac{\epsilon_1}{x}\right) y = 0. \quad (12)$$

Die unabhängige Veränderliche x ist reell. Die Koeffizienten sind beliebige komplexe Zahlen. Man erhält zwei partikuläre Integrale $y_{1,2}(x)$ dieser Differentialgleichung in der Form

$$y_{1,2}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{C_{1,2}} e^{xz} (z - c_1)^{a_1-1} (z - c_2)^{a_2-1} dz, \quad (13)$$

wenn c_1, c_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $z^2 + \delta_0 z + \varepsilon_0 = 0$ sind, und

$$a_1 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_1}{c_1 - c_2},$$

$$a_2 = \frac{\varepsilon_1 + \delta_1 c_2}{c_2 - c_1}$$

gesetzt wird [1, S. 26]. Die Integrationswege C_1, C_2 sollen aus dem negativen Unendlichen kommend c_1 , bzw. c_2 im positiven Sinn umschlingen und wieder dorthin zurückführen.

Im vorliegenden Fall gilt

$$c_1 = i, \quad c_2 = -i, \quad a_1 = \frac{i\kappa}{2} - l, \quad a_2 = -\frac{i\kappa}{2} - l,$$

daher erhält man zwei partikuläre Integrale von Gl. (11) in der Gestalt

$$\begin{aligned} y_{1,2}(x) &= \frac{1}{i\pi} \int_{C_{1,2}} e^{xz} (z - i)^{\frac{i\kappa}{2} - l - 1} (z + i)^{-\frac{i\kappa}{2} - l - 1} dz = \\ &= \frac{1}{i\pi} \int_{C_{1,2}} e^{xz} \left(\frac{z - i}{z + i} \right)^{\frac{i\kappa}{2}} (z^2 + 1)^{-l} \frac{dz}{z^2 + 1}, \end{aligned} \quad (14)$$

wobei die Integrationswege C_1, C_2 aus der Abb. 1 abgelesen werden können. $y_1(x)$ stellt die auslaufende Welle dar, ist also die physikalisch zu verwendende Lösung [1, S. 30].

Durch eine Umformung erhält man

$$y_{1,2}(x) = \frac{(-1)^{\frac{i\kappa}{2}}}{i\pi} \int_{C_{1,2}} \exp \left[xz + i\frac{\kappa}{2} \ln \frac{1 + iz}{1 - iz} - l \ln (z^2 + 1) \right] \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Die Substitution einer neuen Integrationsvariablen $\tau = \arctan z$ ergibt

$$y_{1,2}(x) = \frac{(-1)^{\frac{i\kappa}{2}}}{i\pi} \int_{L_{1,2}} \exp [x \tan \tau - \kappa \tau + 2l \ln \cos \tau] d\tau.$$

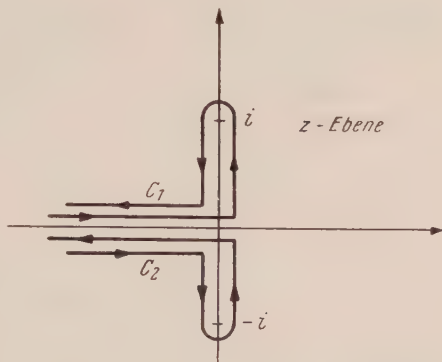


Abb. 1.

wo $L_{1,2}$ die Bilder der Integrationswege $C_{1,2}$ in der τ -Ebene sind. Wenn z von $-\infty$ nach 0 geht, so geht $\tau = \arctan z$ von $-\pi/2$ nach 0. Bei der Umschlingung des Punktes i geht τ von 0 in der oberen Halbebene nach π . Geht nun weiter z von 0 nach $-\infty$, so geht τ von π nach $\pi/2$. Analoges gilt für L_2 . Abb. 2 zeigt beide Wege.

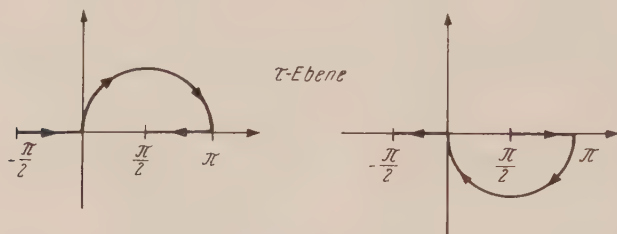


Abb. 2.

B. Die Sattelpunktmethode.

Die Sattelpunkt- oder Paßmethode ist anwendbar bei der Berechnung beliebiger Integrale von der Gestalt

$$\int_W e^{F(\tau, \kappa)} d\tau,$$

wo die Funktion F außer von der Integrationsvariablen τ noch von einem oder mehreren großen Parametern abhängt, und der Weg W im Komplexen von einem Gebiet $\lim \exp F(\tau, \kappa) = 0$ ausgeht und zu einem ebensolchen Gebiet hinführt. Ein besonderer Vorzug der Sattelpunktmethode besteht darin, daß die Rechnungen so durchgeführt werden können, daß auch eine größere Komplikation im Aufbau der zu approximierenden Integrale ihre Wirksamkeit nicht begrenzt.

Innerhalb des Regularitätsbereichs von $F(\tau)$ kann W beliebig verschoben werden. Der Weg W wird nun über die Sattelpunkte von $F(\tau)$ geführt. Diese sind durch $F'(\tau_s) = 0$ bestimmt. Die Richtung des Weges im Sattelpunkt τ_s bestimmt man so, daß $R\{F(\tau)\}$ dort seinen größten Wert annimmt. Die Kurven des steilsten Anstiegs haben die Gleichung $J\{F(\tau)\} = J\{F(\tau_s)\}$. Das Integral wird nun nicht mehr über den ganzen Weg erstreckt, sondern nur über eine kleine Umgebung des Sattelpunktes.

Es soll nun das Integral

$$\int_{L_1} \exp [x \tan \tau - \kappa \tau + 2i \ln \cos \tau] d\tau$$

betrachtet werden. Da die Veränderliche x und der Parameter κ gleichzeitig groß sein sollen, kann man $x = a\kappa$ setzen, mit reellem $a > 0$ (8 e, 9).

Man hat also das Integral $\int_{L_1} e^{F(\tau, \kappa)} d\tau$ mit

$$F(\tau, \kappa) = \kappa \left(a \tan \tau - \tau + \frac{2l}{\kappa} \ln \cos \tau \right) \quad (16)$$

auszuwerten. Die oben verlangte Bedingung ist erfüllt, denn es gilt $\lim F(\tau, \kappa) = -\infty$ für $\tau = -\pi/2 + 0$ und $\tau = \pi/2 + 0$, wobei, wie angedeutet, am Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges der rechtseitige Grenzwert zu nehmen ist.

C. Bestimmung der Sattelpunkte.

Es sollen zunächst die zu verwendende Funktion und ihre Ableitungen angegeben werden:

$$F(\tau) = \kappa \left(a \tan \tau - \tau + \frac{2l}{\kappa} \ln \cos \tau \right), \quad (17 a)$$

$$F'(\tau) = \kappa \left(\frac{a}{\cos^2 \tau} - 1 - \frac{2l}{\kappa} \tan \tau \right), \quad (17 b)$$

$$F''(\tau) = \frac{\kappa}{\cos^2 \tau} \left(2a \tan \tau - \frac{2l}{\kappa} \right) = \frac{\kappa}{\cos^2 \tau} D(\tau), \quad (17 c)$$

$$F'''(\tau) = \frac{2\kappa}{\cos^4 \tau} \left(a + 2a \sin^2 \tau - \frac{2l}{\kappa} \sin \tau \cos \tau \right). \quad (17 d)$$

Zur Bestimmung der Sattelpunkte erhält man aus Gl. (17 b) eine quadratische Gleichung in $\tan \tau$

$$a \tan^2 \tau - \frac{2l}{\kappa} \tan \tau + a - 1 = 0. \quad (18)$$

Aus dieser ergibt sich

$$\tau_s = \arctan \left(\frac{l}{a\kappa} + \sqrt{\frac{1-a}{a} + \left(\frac{l}{a\kappa} \right)^2} \right). \quad (19)$$

Jetzt sollen die Sattelpunkte nach der kleinen Größe $1/\kappa$ entwickelt werden. Die Werte, die τ_s für $1/\kappa = 0$ annimmt, seien mit τ_0 bezeichnet. Aus Gl. (19) ergibt sich

$$\cos^2 \tau_0 = a. \quad (20)$$

Hieraus ist ersichtlich, daß für $a < 1$ zwei reelle τ_0 -Werte vorhanden sind, für die mit $\cos^2 a = a$

$$\tau_{01} = -a \quad \text{und} \quad \tau_{02} = a \quad (21)$$

gilt. Außerdem können wegen Gl. (19) auch alle Vielfachen von π hinzugefügt werden. Einer dieser Werte, nämlich

$$\tau_{03} = \tau_{01} + \pi = \pi - a, \quad (22)$$

soll noch herausgegriffen werden.

Der Fall $a = 1$ wird später gesondert betrachtet.

Für $a > 1$ folgt aus Gl. (20), daß zwei imaginäre τ_0 -Werte vorhanden sind, für die mit $\mathfrak{C}o\mathfrak{f}^2 a = a$

$$\tau_{01} = i a \quad \text{und} \quad \tau_{02} = -i a \quad (23)$$

gilt.

Wenn man zur Abkürzung das Argument von Gl. (19) mit y bezeichnet, so gilt

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{1+y^2}; \quad \frac{dy}{d\frac{1}{\kappa}} = \frac{l}{a} + \frac{(l/a)^2}{\sqrt{\frac{1-a}{a} + \left(\frac{l}{a\kappa}\right)^2}} \frac{1}{\kappa}$$

daraus

$$\frac{d^2\tau}{dy^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}; \quad \frac{d^2y}{d\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2} = -\frac{(l/a)^2}{\sqrt{\frac{1-a}{a} + \left(\frac{l}{a\kappa}\right)^2}} - \frac{(l/a)^3}{\left(\frac{1-a}{a} + \left(\frac{l}{a\kappa}\right)^2\right)^{3/2}} \frac{1}{\kappa^2}.$$

Dann ergibt sich für $1/\kappa \rightarrow 0$

$$y(0) = \sqrt{\frac{1-a}{a}} = \tan \tau_0; \quad \left(\frac{d\tau}{dy}\right)_{\frac{1}{\kappa} \rightarrow 0} = a; \quad \left(\frac{dy}{d\frac{1}{\kappa}}\right)_{\frac{1}{\kappa} \rightarrow 0} = \frac{l}{a};$$

$$\left(\frac{d^2\tau}{dy^2}\right)_{\frac{1}{\kappa} \rightarrow 0} = -2 \tan \tau_0 \cos^4 \tau_0; \quad \left(\frac{d^2y}{d\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2}\right)_{\frac{1}{\kappa} \rightarrow 0} = -\frac{l^2}{\cos^4 \tau_0 \tan \tau_0}.$$

Aus diesen Formeln folgt

$$\left(\frac{d\tau}{d\frac{1}{\kappa}}\right)_{\frac{1}{\kappa} \rightarrow 0} = \tau_0' - l; \quad \left(\frac{d^2\tau}{d\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2}\right)_{\frac{1}{\kappa} \rightarrow 0} = \tau_0'' - \frac{l^2}{\sin \tau_0 \cos \tau_0} (1 - 2 \sin^2 \tau_0). \quad (24)$$

Jetzt kann man die TAYLOR-Reihe für τ_s aufstellen, wobei diese Ausdrücke eingesetzt zu denken sind:

$$\tau_s = \tau_0 + \frac{1}{\kappa} \tau_0' + \frac{1}{2\kappa^2} \tau_0'' + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right). \quad (25)$$

Die Sattelpunkte für $l \neq 0$ haben also folgende Lage: Für $a < 1$, das heißt für reelles τ_0 , bleiben die Sattelpunkte τ_s reell, sie sind jedoch in positiver Richtung etwas verschoben. Für $a > 1$ ergibt das erste und dritte Glied einen imaginären Beitrag. Das zweite Glied ist reell, ergibt also auch eine Verschiebung nach rechts. Für große Werte von κ nähern sich die Sattelpunkte jenen, die sich im Fall $l = 0$ ergeben.

Mittels der Ableitungen Gl. (24) können auch andere Reihenentwicklungen leicht angegeben werden:

$$\tan \tau_s = \tan \tau_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\tau_0'}{\cos^2 \tau_0} + \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{\tau_0''}{\cos^2 \tau_0} + \frac{2\tau_0'^2}{\cos^2 \tau_0} \tan \tau_0 \right), \quad (26)$$

daraus mit Gl. (20)

$$a \tan \tau_s = \sin \tau_0 \cos \tau_0 + \frac{1}{\kappa} \tau_0' + \frac{1}{2\kappa^2} (\tau_0'' + 2\tau_0'^2 \tan \tau_0), \quad (27)$$

und weiter

$$\ln \cos \tau_s = \ln \cos \tau_0 - \frac{1}{\kappa} \tau_0' \tan \tau_0. \quad (28)$$

Aus Gl. (17) und (27) ergibt sich

$$D(\tau_s) = 2 \sin \tau_0 \cos \tau_0 + O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right). \quad (29)$$

Ferner ist

$$F''(\tau_s) = \frac{\kappa}{\cos^2 \tau_s} D(\tau_s) = 2\kappa \frac{\sin \tau_0 \cos \tau_0}{\cos^2 \tau_s}. \quad (30)$$

Aus Gl. (17), (27) und (28) ergibt sich ferner der später benötigte Ausdruck

$$\begin{aligned} F(\tau_s) + \ln \cos \tau_s &= \kappa (a \tan \tau_s - \tau_s) + (2l+1) \ln \cos \tau_s = \\ &= \kappa \left(\sin \tau_0 \cos \tau_0 - \tau_0 - \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan \tau_0 \right) + \ln \cos^{2l+1} \tau_0. \end{aligned} \quad (31)$$

D. Bestimmung der asymptotischen Näherungen.

Man muß jetzt die drei Fälle $a \lesseqgtr 1$ unterscheiden.

1. $a < 1$. Der Integrationsweg L_1 kann so deformiert werden, daß er über die drei Sattelpunkte τ_1 , τ_2 , τ_3 geht, die sich aus Gl. (21) und (22) ergeben. Die Sattelpunktskurven bestehen aus der reellen Achse $v=0$ und aus den Zweigen durch je einen Sattelpunkt. Für L_1 soll folgender Weg genommen werden: Auf der Geraden $v=0$ von $-\pi/2$ über den Sattelpunkt τ_1 bis zum Sattelpunkt τ_2 , von dort in einem Bogen nach π , wo der Integrand gleich $e^{-\kappa\tau}$, also wieder reell

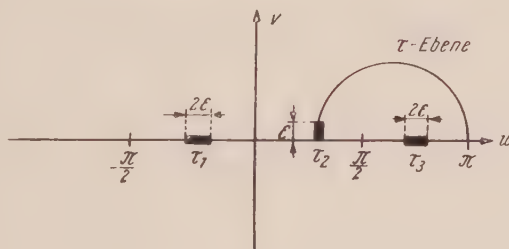


Abb. 3.

wird, dann von π über den Sattelpunkt τ_3 nach $\pi/2$. Die Beiträge zum

Integral $\int_{L_1} e^{F(\tau)} d\tau$ von den Sattelpunkten τ_1 und τ_3 sind reell, der

Beitrag des Sattelpunktes τ_2 ist imaginär.

Die Integration in der Nähe des Sattelpunktes τ_1 erfolgt auf dem geradlinigen Stück $\tau_1 - \varepsilon$ bis $\tau_1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon = \kappa^{-2/3}$. Nach Einführung einer neuen Integrationsvariablen u durch

$$-u^2 = \frac{(\tau - \tau_1)^2}{2} F''(\tau_1); \quad du = \sqrt{-\frac{F''(\tau_1)}{2}} d\tau,$$

wobei $F''(\tau_1) < 0$, wird das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1 - \varepsilon}^{\tau_1 + \varepsilon} e^{F(\tau)} d\tau &= \frac{e^{F(\tau_1)}}{\sqrt{-\frac{F''(\tau_1)}{2}}} \int_{-\varepsilon \sqrt{-\frac{F''(\tau_1)}{2}}}^{\varepsilon \sqrt{-\frac{F''(\tau_1)}{2}}} e^{-u^2} du (1 + O(\kappa^{-1/3})) \\ &= \frac{e^{F(\tau_1)}}{\sqrt{-\frac{F''(\tau_1)}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

Mit dem Vorfaktor von Gl. (15) erhält man

$$\frac{(-1)^{i \frac{\pi}{2}} e^{F(\tau_1)}}{i \sqrt{\pi} \sqrt{-\frac{F''(\tau_1)}{2}}}$$

als Beitrag des ersten Sattelpunktes.

Der Beitrag des Sattelpunktes $\tau_3 = \tau_1 + \pi$ ist wegen $F(\tau_3) = -\kappa\pi + F(\tau_1)$, $F''(\tau_3) = F''(\tau_1)$, um den Faktor $e^{-\kappa\pi} \doteq e^{-150}$ kleiner als der des ersten Sattelpunktes, kann also weggelassen werden.

Der Beitrag des Sattelpunktes τ_2 wird folgendermaßen bestimmt. Man ersetzt den von τ_2 wegführenden Integrationsweg durch das geradlinige Stück von τ_2 bis $\tau_2 + \varepsilon e^{i \frac{\pi}{2}}$. Es ergibt sich wie früher

$$\int_{\tau_2}^{\tau_2 + \varepsilon e^{i \frac{\pi}{2}}} e^{F(\tau)} d\tau = e^{F(\tau_2)} \int_{\tau_2}^{\tau_2 + \varepsilon e^{i \frac{\pi}{2}}} e^{\frac{1}{2}(\tau - \tau_2)^2 F''(\tau_2)} d\tau.$$

Bei Einführung einer neuen reellen Integrationsvariablen u mit

$$\sqrt{\frac{F''(\tau_2)}{2}}(\tau - \tau_2) = e^{i \frac{\pi}{2}} u, \quad \text{da } F''(\tau_2) > 0,$$

wird das Integral gleich

$$\frac{e^{F(\tau_2)} e^{i \frac{\pi}{2}}}{\sqrt{\frac{F''(\tau_2)}{2}}} \int_0^{\varepsilon \sqrt{\frac{F''(\tau_2)}{2}}} e^{-u^2} du.$$

Als Beitrag des Sattelpunktes τ_2 ergibt sich also

$$\frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{F(\tau_2)}{2}}}{\sqrt{\frac{F''(\tau_2)}{2}}}.$$

Die Addition der beiden Beiträge ergibt den vollständigen Ausdruck für die asymptotische Näherung der Integrale der vorgegebenen Differentialgleichung in der Form

$$y_1(x) \sim \frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{i\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{\frac{F(\tau_1)}{2}}}{\sqrt{\frac{F''(\tau_1)}{2}}} + \frac{i}{2} \frac{e^{\frac{F(\tau_2)}{2}}}{\sqrt{\frac{F''(\tau_2)}{2}}} \right); \quad (32)$$

$$y_2(x) = y_1(x).$$

Um die Formel (32) ausführlich aufzuschreiben, bildet man mit Gl. (30) und (31) den Ausdruck

$$\frac{e^{\frac{F(\tau_2)}{2}}}{\sqrt{\frac{F''(\tau_2)}{2}}} = \frac{\exp \kappa \left[\sin \tau_0 \cos \tau_0 - \tau_0 - \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan \tau_0 \right]}{\sqrt{\kappa} \sqrt{-\sin \tau_0 \cos \tau_0}} \cos^{2l+1} \tau_0 \quad (33)$$

und es ergibt sich, da $-\tau_{01} = \tau_{02} = \alpha$,

$$y_1(x) \sim \frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{i\sqrt{\pi\kappa}} \frac{\cos^{2l+1} \alpha}{\sqrt{\sin \alpha \cos \alpha}} \cdot \left\{ \exp \kappa \left[\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan \alpha \right] + \frac{i}{2} \exp -\kappa \left[\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan \alpha \right] \right\}. \quad (34)$$

Es soll noch der Grenzfall kleiner α betrachtet werden. Da $\cos \alpha = \sqrt{a}$, wird $\sin \alpha = 1$, $\alpha = \arccos \sqrt{a} = \pi/2 - \sqrt{a}$ und es ergibt sich

$$y_1(x) = \frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{i\sqrt{\pi\kappa}} \frac{4}{\sqrt{a} a^l} \left\{ e^{\kappa \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{a} + \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \frac{1}{\sqrt{a}} \right)} + \frac{i}{2} e^{-\kappa \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{a} + \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \frac{1}{\sqrt{a}} \right)} \right\}$$

oder

$$y_1(x) = \frac{(-1)^{\frac{i}{2}}}{i\sqrt{\pi\kappa}} \frac{x^{l+1/4}}{x^{l+3/4}} \left(e^{\kappa \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{x\kappa} + \frac{l(l+1)}{\sqrt{x\kappa}} \right)} + \frac{i}{2} e^{-\kappa \left(\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{x\kappa} + \frac{l(l+1)}{\sqrt{x\kappa}} \right)} \right).$$

2. $a = 1$. Wenn die Diskriminante der Gl. (18) verschwindet, fallen die beiden Wurzeln zusammen. Dies tritt bei dem Wert

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2l}{\kappa}\right)^2} = 1 + \left(\frac{l}{\kappa}\right)^2$$

ein. Für dieses a wird $\tan \tau_s = \frac{l}{a\kappa} = \frac{l}{\kappa}$ und $\tau_s = \arctan \frac{l}{a\kappa} = \frac{l}{\kappa} + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)$.

Wie man aus Gl. (17 c) ersieht, ergibt sich in diesem Fall das Verschwinden der zweiten Ableitung $F''(\tau_s) = 0$.

Allgemein geht man nun so vor: Man approximiert das Integral

$\int e^{F(\tau)} d\tau$ durch $e^{F(\tau_s)} \int e^{F'''(\tau_s) \frac{\tau^3}{3!}} d\tau$, wobei der Integrationsweg noch geeignet zu wählen sein wird. Dann führt man eine neue Integrationsvariable u ein durch

$$F'''(\tau_s) \frac{\tau^3}{3!} = -u^3, \quad \text{das heißt} \quad \tau = \sqrt[3]{-1} \frac{u}{\sqrt[3]{F'''(\tau_s)/3!}}.$$

Um ein reelles u zu erhalten, nimmt man im vorliegenden Fall, da $F'''(\tau_s)$ reell ist, die Richtungen der dritten Wurzel aus -1 . Man ersetzt also den Integrationsweg durch die Wegstücke von $-\varepsilon$ bis 0 und von 0 bis $\varepsilon e^{i\frac{\pi}{3}}$. Mit Verwendung des Integrals

$$\int_0^\infty e^{-u^2} dz = \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$$

erhält man

$$y_1(x) \sim \frac{(-1)^{i\frac{\pi}{2}}}{i\pi} \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) e^{F(\tau_s)} \frac{1}{\sqrt[3]{F'''(\tau_s)/3!}} \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right).$$

Wenn man den Sattelpunkt in Gl. (17) einsetzt, ergibt sich

$$F(\tau_s) = \kappa (a \tan \tau_s - \tau_s + 2l \ln \cos \tau_s) = \kappa O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)$$

und

$$F'''(\tau_s) = 2\kappa \cos^{-4} \tau_s \left(a + 2a \sin^2 \tau_s - \frac{2l}{\kappa} \sin \tau_s \cos \tau_s\right) = 2\kappa \left(1 + 3 \frac{l^2}{\kappa^2}\right),$$

also folgt

$$y_1(x) \sim \frac{(-1)^{i\frac{\pi}{2}}}{i\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{\kappa}} \left(1 + \frac{l^2}{\kappa^2}\right) \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right),$$

$$y_2(x) = \overline{y_1(x)}.$$

3. $a > 1$. In diesem Fall sind die Sattelpunkte komplex. Wie früher kann man die Lösung der Differentialgleichung durch ein Integral von der folgenden Gestalt annähern

$$e^{F(\tau_s)} \int \frac{1}{e^{\frac{1}{2}(\tau - \tau_s)^2 F''(\tau_s)}} d\tau (1 + O(\kappa^{-1/2})),$$

wobei der Integrationsweg ein Geradenstück von der Länge 2ε ist. Man legt den Integrationsweg so, daß sich aus

$$\frac{(\tau - \tau_s)^2}{2} F''(\tau_s) = -u^2$$

ein reelles u ergibt. Man erhält dann

$$y_1(x) \sim \frac{(-1)^{i\frac{\kappa}{2}}}{i\sqrt{\pi}} \frac{e^{F(\tau_s)}}{\sqrt{-\frac{F''(\tau_s)}{2}}},$$

oder ausführlich mit Gl. (23), (30) und (31)

$$y_1(x) \sim \frac{(-1)^{i\frac{\kappa}{2}} \operatorname{Co} f^{2l} \alpha}{i\sqrt{\pi \kappa} \sqrt{\operatorname{Tan} \alpha}} e^{i\left[\frac{\pi}{4} + \kappa \left(\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Co} f \alpha - \alpha - \frac{l(l-1)}{\kappa^2} \operatorname{Tan} \alpha \right) \right]}$$

Hier wird das Resultat bei Berücksichtigung eines einzigen Sattelpunktes komplex, so daß die Beiträge der anderen Sattelpunkte nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Es soll noch der Übergang $a \rightarrow \infty$ durchgeführt werden. Da κ/x sehr klein ist, gilt $\operatorname{Co} f \alpha = \sqrt{\frac{\kappa}{x}}$, $\operatorname{Sin} \alpha = \sqrt{\frac{x}{\kappa}} - 1 = \sqrt{\frac{x}{\kappa}} \left(1 - \frac{\kappa}{2x}\right)$, $\operatorname{Tan} \alpha = 1$, sowie $\frac{e^\alpha}{2} = \sqrt{\frac{x}{\kappa}}$, woraus $\alpha = \frac{1}{2} \ln \frac{4x}{\kappa}$ folgt. Eingesetzt ergibt dies

$$y_1(x) = \frac{(-1)^{i\frac{\kappa}{2}}}{i\sqrt{\pi \kappa}} \left(\frac{x}{\kappa}\right)^{2l} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\kappa \left(\frac{x}{\kappa} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{4x}{\kappa} - \frac{l(l+1)}{\kappa^2}\right)}.$$

E. Berechnung der Ableitung $y_1'(x)$.

Aus der Formel

$$y_1(x) = \frac{(-1)^{i\frac{\kappa}{2}}}{i\pi} \int_{L_1} \exp [x \tan \tau - \kappa \tau + 2l \ln \cos \tau] d\tau$$

ergibt sich durch Differentiation

$$y_1'(x) = \frac{(-1)^{i\frac{\kappa}{2}}}{i\pi} \int_{L_1} \exp [x \tan \sigma - \kappa \sigma + 2l \ln \cos \sigma + \ln \tan \sigma] d\sigma,$$

da L_1 von x unabhängig ist.

Setzt man wieder $x = a \kappa$ und zur Abkürzung

$$\Phi(\sigma) = F(\sigma) + \ln \tan \sigma,$$

so erhält man das Integral

$$\int_{L_1} \exp \Phi(\sigma) d\sigma,$$

das wiederum mittels der Sattelpunktmethode ausgewertet werden kann, da der Integrand am Anfang und Ende von L_1 verschwindet, denn es ist $\tan \sigma e^{\tan \sigma} \rightarrow 0$ für $\tan \sigma \rightarrow -\infty$.

Wie früher bildet man

$$\Phi(\sigma) = \kappa(a \tan \sigma - \sigma) + 2l \ln \cos \sigma + \ln \tan \sigma, \quad (35 a)$$

$$\Phi'(\sigma) = \kappa \left(a \tan^2 \sigma - \frac{2l-1}{\kappa} \tan \sigma + \frac{1}{\kappa} \tan^{-1} \sigma + a - 1 \right), \quad (35 b)$$

$$\Phi''(\sigma) = \kappa \cos^{-2} \sigma \left(2a \tan \sigma - \frac{2l}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} (1 - \cot^2 \sigma) \right) = \kappa \cos^{-2} \sigma \Delta(\sigma). \quad (35 c)$$

Die Sattelpunkte σ_s ergeben sich aus der Gl. (35 b), die umgeformt lautet

$$a \tan^3 \sigma - \frac{1}{\kappa} (2l-1) \tan^2 \sigma + (a-1) \tan \sigma + \frac{1}{\kappa} = 0. \quad (36)$$

Dies ist eine kubische Gleichung für $\tan \sigma_s$. Zwei Lösungen σ_s liegen nahe den Punkten $\pm a$ und die dritte nahe dem Punkt 0, wobei wie früher $\cos^2 a = a$ gilt. Es soll nur der Fall $a < 1$ betrachtet werden. Der Sattelpunkt in der Nähe von 0 ergibt keinen Beitrag, da wegen $\ln \tan 0 = -\infty$ der Integrand verschwindet.

Die Sattelpunkte sollen nach $1/\kappa$ um die Punkte

$$\sigma_s \left(\frac{1}{\kappa} \rightarrow 0 \right) \equiv \sigma_0 = \begin{cases} \sigma_{01} = -a \\ \sigma_{02} = a \end{cases} \quad (37)$$

entwickelt werden. Aus Gl. (36) folgt

$$\sigma' \left(\frac{1}{\kappa} \right) = \frac{2l \sin^2 \sigma - 1}{3a \tan^2 \sigma - \frac{2}{\kappa} (2l-1) \tan \sigma + a - 1}$$

und daher

$$\sigma'_0 = l - \frac{1}{2 \sin^2 \sigma_0}. \quad (38)$$

Ebenso kann σ''_0 bestimmt werden. Es gelten dann folgende Reihenentwicklungen

$$\sigma_s = \sigma_0 + \frac{1}{\kappa} \sigma'_0 + \frac{1}{2\kappa^2} \sigma''_0, \quad (39)$$

$$a \tan \sigma_s = \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 + \frac{1}{\kappa} \sigma'_0 + \frac{1}{2\kappa^2} (\sigma''_0 + 2 \sigma_0'^2 \tan \sigma_0), \quad (40)$$

$$\ln \cos \sigma_s = \ln \cos \sigma_0 - \frac{1}{\kappa} \sigma_0' \tan \sigma_0. \quad (41)$$

$$\ln \tan \sigma_s = \ln \tan \sigma_0 + \frac{1}{\kappa} \frac{\sigma_0'}{\sin \sigma_0 \cos \sigma_0} \quad (42)$$

$$\cot^2 \sigma_s = \cot^2 \sigma_0 - \frac{2}{\kappa} \frac{\cos \sigma_0}{\sin^2 \sigma_0} \sigma_0'.$$

Ferner berechnet sich der Ausdruck in Gl. (35)

$$\Delta(\sigma_s) = 2 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 - \frac{2}{\kappa} \cot^2 \sigma_0.$$

daher

$$\begin{aligned} [\Delta(\sigma_s)]^{-\frac{1}{2}} &= (2 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2\kappa} \frac{\cos \sigma_0}{\sin^3 \sigma_0} \right) = \\ &= (2 \sin \sigma_0 \cos \sigma_0)^{-\frac{1}{2}} \exp \frac{\cos \sigma_0}{2\kappa \sin^3 \sigma_0}. \end{aligned} \quad (43)$$

Weiter folgt für

$$\begin{aligned} F(\sigma_s) + \ln \cos \sigma_s &= \kappa (a \tan \sigma_s - \sigma_s) + (2l+1) \ln \cos \sigma_s = \\ &= \kappa \left\{ \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 - \sigma_0 - \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan \sigma_0 + \frac{1}{2\kappa^2} \left(1 + \frac{1}{2 \sin^2 \sigma_0} \right) \frac{\tan \sigma_0}{\sin^2 \sigma_0} \right\} + \\ &\quad + \ln \cos^{2l+1} \sigma_0. \end{aligned} \quad (44)$$

Ganz analog wie für die Entwicklung von $y_1(x)$ erhält man mit Hilfe der Sattelpunktmethode als asymptotische Näherung

$$y_1'(x) \sim \frac{(-1)^{i\kappa/2}}{i\sqrt{\pi}} \left(\frac{e^{\Phi(\sigma_1)}}{\sqrt{-\frac{\Phi''(\sigma_1)}{2}}} + \frac{i}{2} \frac{e^{\Phi(\sigma_2)}}{\sqrt{\frac{\Phi''(\sigma_2)}{2}}} \right). \quad (45)$$

Wenn man die oben abgeleiteten Reihenentwicklungen einsetzt, erhält man

$$\begin{aligned} \frac{e^{\Phi(\sigma_s)}}{\sqrt{-\frac{\Phi''(\sigma_s)}{2}}} &= \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \frac{\cos^{2l+1} \sigma_0}{\sqrt{-\sin \sigma_0 \cos \sigma_0}} \tan \sigma_0 \exp \left[\kappa \left\{ \sin \sigma_0 \cos \sigma_0 - \sigma_0 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan \sigma_0 \right\} + \frac{1}{\kappa} \frac{\tan \sigma_0}{\sin^2 \sigma_0} \left(l + \frac{1}{4 \sin^2 \sigma_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Da nun $-\sigma_{01} = \sigma_{02} = a$, folgt

$$\begin{aligned} y_1'(x) &\sim \frac{(-1)^{i\kappa/2}}{i\sqrt{\pi\kappa}} \frac{\cos^{2l+1} a}{\sqrt{\sin a \cos a}} (-\tan a). \\ &\cdot \left\{ \exp \kappa \left[a - \sin a \cos a + \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan a - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\tan a}{\sin^2 a} \left(l + \frac{1}{4 \sin^2 a} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} \exp -\kappa \left[a - \sin a \cos a + \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan a - \frac{1}{\kappa^2} \frac{\tan a}{\sin^2 a} \left(l + \frac{1}{4 \sin^2 a} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

Mit den Abkürzungen

$$H(a) = \kappa \left[a - \sin a \cos a + \frac{l(l+1)}{\kappa^2} \tan a \right],$$

$$K(a) = -\frac{\tan a}{\sin^2 a} \left(l + \frac{1}{4 \sin^2 a} \right).$$

wird die Formel (47)

$$y_1'(x) \sim - \frac{(-1)^{\frac{i\kappa}{2}} \cos^{2l+1} a}{i \sqrt{\pi \kappa} \sqrt{\sin a \cos a}} \tan a \left\{ e^{H(a) \pm \frac{1}{\kappa} K(a)} - \frac{i}{2} e^{-H(a) - \frac{1}{\kappa} K(a)} \right\}; \quad (48)$$

ebenso kann Gl. (34) ausgedrückt werden

$$y_1(x) \sim \frac{(-1)^{\frac{i\kappa}{2}} \cos^{2l+1} a}{i \sqrt{\pi \kappa} \sqrt{\sin a \cos a}} \left\{ e^{H(a)} + \frac{i}{2} e^{-H(a)} \right\}. \quad (49)$$

Daraus folgt mit der Entwicklung $e^{\pm \frac{1}{\kappa} K} = 1 \pm \frac{1}{\kappa} K$

$$\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = -\tan a \left\{ \frac{e^{H(a)} - \frac{i}{2} e^{-H(a)}}{e^{H(a)} + \frac{i}{2} e^{-H(a)}} + \frac{1}{\kappa} K(a) \right\}. \quad (50)$$

Wenn man berücksichtigt, daß $H(a) \doteq 30$, kann man schreiben

$$1 - \frac{i}{2} e^{-2H} \\ 1 + \frac{i}{2} e^{-2H} \doteq 1 - i e^{-2H}. \quad (51)$$

Daher wird

$$R\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) = -\tan a \left(1 + \frac{1}{\kappa} K(a) \right), \quad (52)$$

$$J\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) = \tan a e^{-2H(a)}. \quad (53)$$

In $R(y_1'/y_1)$ kann man den l -freien Teil von K weglassen, da er nur eine Korrektur von 1 bis 2 Prozent ausmacht (4, S. 866). Es ist also

$$R\left(\frac{y_1'}{y_1}\right) = -\tan a : \frac{l}{\kappa \cos^2 a} = -\tan a : \frac{l}{\kappa}. \quad (54)$$

F. Die Eigenwertgleichung und ihre Auflösung.

Die Eigenwertgleichung entspringt der Stetigkeitsforderung für die Lösungen der Gl. (5) an der Stelle r_0 . Sie lautet [1, S. 78]:

$$\left. \frac{\chi_i'(x)}{\chi_i(x)} \right|_{r=r_0} = \left. \frac{\chi_1'(x)}{\chi_1(x)} \right|_{r=r_0}. \quad (55)$$

Führt man durch $n^2 = 1 - U E^{-1}$ den Brechungsindex n ein, so wird

$$\frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E-U)} r = n k r = n x. \quad (56)$$

Die Innenraumlösung Gl. (6) erhält die Gestalt

$$\chi_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} n x J_{l+\frac{1}{2}}(n x). \quad (57)$$

Da für die BESSEL-Funktionen $\frac{d}{dx} [x^v J_v(x)] = x^v J_{v-1}(x)$ gilt, wird die Ableitung gleich

$$\chi_l'(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} n \sqrt{n x} J_{l-\frac{1}{2}}(n x) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{l n}{\sqrt{n x}} J_{l+\frac{1}{2}}(n x).$$

Für die linke Seite der Gl. (55) ergibt sich also

$$\frac{\chi_l'(x)}{\chi_l(x)} = n \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(n x)}{J_{l+\frac{1}{2}}(n x)} - \frac{l}{x}. \quad (58)$$

Die rechte Seite der Gl. (55) enthält die Außenraumlösung Gl. (10) $\chi_1(x) = x^{-l} y_1(x)$. Es wird also

$$\frac{\chi_1'(x)}{\chi_1(x)} = \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} - \frac{l}{x}. \quad (59)$$

Unter Beachtung der Beziehung (54) führt das Gleichsetzen der Ausdrücke (58) und (59) zur Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \frac{U}{E}} \frac{J_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E-U)} r_0\right)}{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E-U)} r_0\right)} - \frac{\hbar l}{\sqrt{2\mu E} r_0} = \\ & = -\tan \alpha_0 \frac{1 - \frac{i}{2} \exp - \kappa \left[2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0 + \frac{2l(l+1)}{\kappa^2} \tan \alpha_0 \right]}{1 + \frac{i}{2} \exp - \kappa \left[2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0 + \frac{2l(l+1)}{\kappa^2} \tan \alpha_0 \right]}, \end{aligned} \quad (60)$$

wobei α_0 der Wert von α an der Stelle $r = r_0$ ist.

Die Gleichung für E_r erhält man, da $E_i \ll E_r$, indem einfach alles reell genommen wird:

$$\sqrt{1 - \frac{U}{E_r}} \frac{J_{l-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E_r-U)} r_0\right)}{J_{l+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu(E_r-U)} r_0\right)} - \frac{\hbar l}{\sqrt{2\mu E_r} r_0} = -\tan \alpha_0. \quad (61)$$

Der Brechungsindex n kann in Real- und Imaginärteil zerlegt werden

$$n = \sqrt{1 - \frac{U}{E}} = \quad (62)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{U}{E_r} \left(1 + i \frac{E_i U}{2 E_r^2 n_r^2} \right)} = n_r - i \frac{\lambda}{2_v k_r} \frac{1 - n_r^2}{n_r} \doteq 0,3 - i 10^{-18}.$$

Der Quotient der beiden BESSEL-Funktionen in Gl. (60) soll mit $J = J_r + i J_i$ bezeichnet werden; dann ergibt sich die Gl. (61) in der Gestalt

$$J_r = \frac{l}{n_r k_r r_0} - \frac{\tan \alpha_0}{n_r}. \quad (63)$$

Das Argument der BESSEL-Funktionen kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \sqrt{2 \mu (E - U)} r_0 &= \frac{1}{h} \sqrt{2 \mu (E_r - U)} \left(1 + i \frac{E_i}{2 (E_r - U)} \right) r_0 = \\ &= n_r k_r r_0 - i \frac{\lambda r_0}{2_v n_r}. \end{aligned} \quad (64)$$

Mit Hilfe der Beziehungen

$$2 J_v'(x) = J_{v-1}(x) - J_{v+1}(x),$$

$$\frac{2v}{x} J_v(x) = J_{v-1}(x) + J_{v+1}(x)$$

zerlegt man die BESSEL-Funktionen in Real- und Imaginärteil. Entwickelt man sie in eine Reihe nach dem kleinen imaginären Glied des Arguments:

$$J_v(a + i\beta) = J_v(a) + i\beta J_v'(a) =$$

$$= J_v(a) + i\beta \left(J_{v-1}(a) - J_{v+1}(a) \right) = J_v(a) + i\beta \left(J_{v-1}(a) - \frac{v}{a} J_v(a) \right),$$

so wird

$$\begin{aligned} J = J_r + i J_i &= \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(a + i\beta)}{J_{l+\frac{1}{2}}(a + i\beta)} = \\ &= \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(a) + i\beta \left\{ J_{l-\frac{3}{2}}(a) - \left(\frac{l}{a} - \frac{1}{2a} \right) J_{l-\frac{1}{2}}(a) \right\}}{J_{l+\frac{1}{2}}(a) + i\beta \left\{ J_{l-\frac{1}{2}}(a) - \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2a} \right) J_{l+\frac{1}{2}}(a) \right\}} = \\ &= J_{l+\frac{1}{2}}^{-2}(a) \left[J_{l-\frac{1}{2}}(a) J_{l+\frac{1}{2}}(a) + i\beta \left\{ \frac{2l-1}{a} J_{l+\frac{1}{2}}(a) J_{l-\frac{1}{2}}(a) - J_{l+\frac{1}{2}}^2(a) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{l}{a} - \frac{1}{2a} \right) J_{l+\frac{1}{2}}(a) J_{l-\frac{1}{2}}(a) - J_{l-\frac{1}{2}}^2(a) + \left(\frac{l}{a} + \frac{1}{2a} \right) J_{l-\frac{1}{2}}(a) J_{l+\frac{1}{2}}(a) \right\} \right] = \\ &= \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(a)}{J_{l+\frac{1}{2}}(a)} - i\beta \left[1 + \frac{J_{l-\frac{1}{2}}^2(a)}{J_{l+\frac{1}{2}}^2(a)} - \frac{2l}{a} \frac{J_{l-\frac{1}{2}}(a)}{J_{l+\frac{1}{2}}(a)} \right] = \\ &= J_r + i \frac{\lambda r_0}{2_v n_r} \left(1 + J_r^2 - \frac{2l}{n_r k_r r_0} J_r \right) \end{aligned} \quad (65)$$

auf Grund von Gl. (64). Der Imaginärteil ist von der Größenordnung 10^{-18} .

Aus Gl. (62) und (65) ergibt sich ferner der Imaginärteil der linken Seite von Gl. (60), wobei der Imaginärteil von $E^{-1/2}$ wegen seiner Kleinheit nicht berücksichtigt zu werden braucht, zu

$$\frac{\lambda r_0}{2v} \left(1 + J_r^2 - \frac{2l}{n_r k_r r_0} J_r \right) - \frac{\lambda}{2v n_r k_r} (1 - n_r^2) J_r.$$

Da nach Gl. (63)

$$J_r^2 - \frac{2l}{n_r k_r r_0} J_r - \left(\frac{\tan \alpha_0}{n_r} - \frac{l}{n_r k_r r_0} \right) \left(\frac{\tan \alpha_0}{n_r} + \frac{l}{n_r k_r r_0} \right) = \frac{\tan^2 \alpha_0}{n_r^2},$$

erhält er endgültig die Gestalt

$$\frac{\lambda r_0}{2v n_r^2} \left\{ n_r^2 + \tan^2 \alpha_0 + \frac{\tan \alpha_0}{k_r r_0} (1 - n_r^2) \right\},$$

wobei der letzte Term in diesem Ausdruck von der Berücksichtigung der Komplexizität des Faktors $(1 - U E^{-1})^{1/2}$ herrührt. Die l -Abhängigkeit hebt sich also bei der hier benützten Näherung vollständig weg. Setzt man den zuletzt gewonnenen Ausdruck (53) gleich, so ergibt sich schließlich

$$\lambda = \frac{2v}{r_0} \frac{n^2 \tan \alpha_0}{n^2 + \tan^2 \alpha_0 + \frac{\tan \alpha_0}{k r_0} (1 - n^2)} e^{-\kappa \left[2\alpha_0 - \sin 2\alpha_0 + \frac{2l(l+1)}{\kappa^2} \tan \alpha_0 \right]}$$

wobei an n und k der Index wieder weggelassen wurde.

Es tritt also im „Vorfaktor“ auch bei genauerer Verwendung der BESSEL-Funktionen keine explizite l -Abhängigkeit in der Formel für die Zerfallskonstante auf.

Literatur.

1. TH. SEXL, Vorlesungen über Kernphysik, Wien, F. Deuticke, 1948.
2. TH. SEXL, Z. Physik, **56**, 72 (1929).
3. TH. SEXL, Z. Physik, **81**, 163 (1933).
4. M. A. PRESTON, Physic. Rev., **74**, 865 (1947).

Zur Optik in der verallgemeinerten Feldtheorie.

Von

Otto Bergmann, Wien.

Mit 1 Abbildung.

(Eingelangt am 29. August 1952.)

Es wird die Ausbreitung von schwachen Lichtwellen in einem lokalen galileischen Koordinatensystem im Rahmen der verallgemeinerten Feldtheorie untersucht. Ein beliebig starkes aber homogenes elektrisch-magnetisches Grundfeld verursacht eine Anisotropie des Raumes. Die Strahlgeschwindigkeit und die Strahlenfläche, ein dreiachsiges Ellipsoid, werden berechnet. Da die Geschwindigkeit der Lichtwellen im allgemeinen kleiner als c ist, können die Wellen, ähnlich wie in einem bewegten Medium der klassischen Elektrodynamik auf Ruhe transformiert werden. In noch extremeren Bezugssystemen, die durch den POYNTING-Vektor des Grundfeldes charakterisiert werden können, schreiten diese Lichtwellen in die Gegenrichtung fort. Dies ist der von SCHRÖDINGER und HITMAIR früher behandelte abnormale Fall. Die Vektoren der elektrischen Verschiebung der magnetischen Induktion und der Wellenvektor bilden dann nicht wie im normalen Fall ein rechtshändiges Koordinatensystem, sondern ein linkshändiges. Dasselbe gilt für die elektrische und magnetische Feldstärke und den Strahlvektor. Die elektrische Feldstärke und die Verschiebung schließen einen stumpfen Winkel ein. Ebenso die analogen magnetischen Feldvektoren.

I. Einleitung.

Die verallgemeinerte Feldtheorie von SCHRÖDINGER¹ liefert bekanntlich die elektromagnetischen Feldgleichungen in einer nicht-linearen Form, die in einem galileischen Koordinatensystem in die Gleichungen der Elektrodynamik von BORN und INFELD² übergeht. Dementsprechend wird der MAXWELLSchen Theorie nur beschränkte Gültigkeit, nämlich für schwache Felder zugesprochen. Die Stärke des Feldes wird dabei in Einheiten einer „absoluten Feldstärke“ gemessen, für die BORN früher eine Abschätzung angab, die einen extrem hohen Wert liefert (10^{15} est. E.).

Diese Abweichung der Feldgleichungen von der Linearität hat natürlich interessante Konsequenzen. So ist zum Beispiel die Geschwindigkeit

¹ E. SCHRÖDINGER, Proc. Roy. Irish Acad. **51**, A 13, 1947; **51**, A 16, 1948; **52**, A 1, 1948. Comm. Dublin Inst. Adv. Stud. Nr. 6, 1951.

² M. BORN und L. INFELD, Proc. Roy. Soc. A **144**, 425, 1934.

auch einer schwachen Lichtwelle nicht notwendig gleich der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Da nämlich das Superpositionsprinzip in dieser Theorie nicht mehr gilt, wird eine Lichtwelle nur dann die klassischen Eigenschaften aufweisen, wenn sie sich im feldfreien Raume ausbreitet.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit von HITTMAIR und SCHRÖDINGER³ wurde dieser Effekt untersucht. Es wurde gezeigt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwachen Lichtwelle richtungsabhängig ist, und zwar stets kleiner oder gleich eins ($= c$). Das Grundfeld, das diesen Effekt verursacht, wurde dabei als homogen oder zumindest nur wenig in Raum und Zeit veränderlich angenommen. In extremen, aber durch LORENTZ-Transformation stets erreichbaren Fällen pflanzen sich die von einem Punkt ausgehenden Strahlen nur innerhalb eines Kegels fort, dessen Achse der POYNTINGvektor des Grundfeldes ist. In jeder dieser erlaubten Richtungen können dann aber zwei Strahlen fortschreiten, die verschiedene Geschwindigkeit haben. Es war zu vermuten, daß eine Untersuchung der Polarisationszustände der Lichtwellen weitere Unterscheidungsmerkmale liefern würde. Wir wollen dies in der vorliegenden Arbeit tun.

Im zweiten Abschnitt werden wir die Feldgleichungen aufschreiben, der die Feldstärken der schwachen Lichtwelle in einem homogenen Grundfeld genügen müssen. Im dritten Abschnitt werden wir die Strahl- und Wellengeschwindigkeit diskutieren und im vierten wird eine Diskussion der Resultate erfolgen.

II. Die Feldstärken der schwachen Lichtwelle.

Zur Beschreibung des Gesamtfeldes werden in dieser Theorie zwei Tensoren F^{ik} und Φ_{ik} verwendet, die den Gleichungen

$$F^{ik}{}_{,k} = 0 \quad (1)$$

und

$$\Phi_{[ik,l]} = 0 \quad (2)$$

genügen. Diese beiden Tensoren stehen in einem nicht-linearen Zusammenhang

$$F^{ik} = 2 \frac{\partial \bar{L}}{\partial \Phi_{ik}} \quad (3)$$

mit

$$L = 1 + \frac{1}{2} \Phi^{ik} \Phi_{ik} - \left(\frac{1}{8} \epsilon^{iklm} \Phi_{ik} \Phi_{lm} \right)^2 \quad (4)$$

Die Diagonalglieder des metrischen Tensors sind gleich ($-1, -1, -1, +1$) gesetzt. Da wir in folgendem nur die Invarianz der Gleichungen bei LORENTZ-Transformationen mit der Funktionaldeterminante $+1$ benutzen werden, brauchen wir zwischen Tensordichten und Tensoren nicht zu unterscheiden.

³ O. HITTMAIR und E. SCHRÖDINGER, Comm. Dublin Inst. Adv. Stud., Nr. 8, 1951.

Das Grundfeld, das zwar homogen aber beliebig stark gedacht ist, muß eine exakte Lösung der Feldgleichungen sein. Nennen wir diese Feldstärken etwa \bar{F}^{ik} und $\bar{\Phi}_{ik}$ und die das überlagerte schwache Feld (Lichtwelle) beschreibenden Feldstärken f^{ik} und φ_{ik} , so können wir für das Gesamtfeld

$$F^{ik} = \bar{F}^{ik} + f^{ik}, \quad \Phi_{ik} = \bar{\Phi}_{ik} + \varphi_{ik} \quad (5)$$

schreiben. Aus Gl. (1) und (2) folgen jedenfalls

$$f^{ik}{}_{,k} = 0 \quad (6)$$

und

$$\varphi_{[ik,l]} = 0, \quad (7)$$

da natürlich die Feldstärken des homogenen Grundfeldes trivialerweise den MAXWELLSchen Gleichungen genügen. Die Gl. (3) gibt die Tensorkomponenten f^{ik} als explizite Funktion der φ_{ik} und der Feldstärken des Grundfeldes. Wir werden diese Gleichung in eine Potenzreihe entwickeln und alle höheren Potenzen von φ_{ik} vernachlässigen. Aus Gl. (3) folgt dann ein linearer Zusammenhang zwischen f^{ik} und φ_{ik} mit Koeffizienten, die nur von den Feldstärken des Grundfeldes abhängen:

$$f^{ik} = \left(\frac{\partial^2 \sqrt{L}}{\partial \Phi_{ik} \partial \Phi_{lm}} \right)_{\varphi_{lm}=0} \cdot \varphi_{lm}. \quad (8)$$

Wir möchten darauf hinweisen, daß wir nicht voraussetzen, daß die Lichtwelle schwach gegenüber dem Grundfeld ist, sondern lediglich, daß φ_{ik} in absoluten Einheiten gemessen sehr viel kleiner als eins ist. Der Fall verschwindenden Grundfeldes ist also in den folgenden Überlegungen enthalten.

Bevor wir die letzte Gleichung auswerten, wollen wir einige neue Bezeichnungen einführen. Der zu φ_{ik} duale Tensor sei mit $\hat{\varphi}^{ik}$ bezeichnet

$$\hat{\varphi}^{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} \varphi_{lm} \quad (9)$$

und analog der zu $\bar{\Phi}_{ik}$ duale Tensor $\hat{\bar{\Phi}}^{ik}$. Ferner führen wir die mit den Feldstärken des Grundfeldes gebildeten Invarianten

$$J_1 = \frac{1}{4} \Phi^{ik} \Phi_{ik}, \quad J_2 = \frac{1}{8} \varepsilon^{iklm} \Phi_{ik} \Phi_{lm}, \quad (10)$$

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2$$

ein. Und schließlich wollen wir die Funktion L als Funktion der $\bar{\Phi}_{ik}$ allein mit W^2 bezeichnen. Es folgt dann mit Gl. (4) und (10)

$$W^2 = (1 + J_1)^2 - J^2. \quad (11)$$

Die Berechnung von Gl. (8) ergibt mit Hilfe der oben eingeführten Abkürzungen

$$f^{ik} = -\frac{J_2}{W} \hat{\varphi}^{ik} + \frac{1}{2W} (\delta^{il} \delta^{mk} - \delta^{kl} \delta^{mi} - \hat{\bar{\Phi}}^{ik} \hat{\bar{\Phi}}^{lm}) \varphi_{lm} -$$

$$- \frac{1}{2W^3} (\bar{\Phi}^{ik} - J_2 \hat{\bar{\Phi}}^{ik}) (\bar{\Phi}^{lm} - J_2 \hat{\bar{\Phi}}^{lm}) \varphi_{lm}. \quad (12)$$

Diese komplizierte Gleichung kann mit Hilfe des MAXWELLSchen Spannung-Energie-Impuls-Tensors

$$T^{ik} = -\bar{\Phi}^{i\sigma} \bar{\Phi}_{\sigma}^k + \delta^{ik} J_1 \quad (13)$$

weitgehend vereinfacht werden. Man überzeugt sich nämlich leicht, etwa in einem speziellen Koordinatensystem von der Richtigkeit der folgenden Identitäten

$$\bar{\Phi}^{ik} \bar{\Phi}_{lm} + \hat{\bar{\Phi}}^{ik} \hat{\bar{\Phi}}_{lm} = -(\delta^{il} T^{km} + \delta^{km} T^{il}) + (\delta^{kl} T^{im} + \delta^{im} T^{kl}) \quad (14)$$

und

$$\begin{aligned} J_1 (\bar{\Phi}^{ik} \bar{\Phi}_{lm} - \hat{\bar{\Phi}}^{ik} \hat{\bar{\Phi}}_{lm}) + J_2 (\bar{\Phi}^{ik} \hat{\bar{\Phi}}_{lm} + \bar{\Phi}_{lm} \hat{\bar{\Phi}}^{ik}) = \\ = T^{il} T^{km} - T^{im} T^{kl} + J^2 (\delta^{il} \delta^{km} - \delta^{im} \delta^{kl}). \end{aligned} \quad (15)$$

Führen wir nun den symmetrischen kontravarianten Tensor Q^{ik} durch

$$Q^{ik} = \frac{1}{W} ((1 + J_1) \delta^{ik} + T^{ik}) \quad (16)$$

ein, so kann Gl. (12) mit Hilfe von Gl. (14) und (15) zu

$$j^{ik} = -\frac{J_2}{W} \hat{\varphi}^{ik} + \frac{1}{W} Q^{il} Q^{km} q_{lm} \quad (17)$$

vereinfacht werden.

Die letzte Gleichung stellt die „Materialgleichung“ dar, die ebenso wie in der elementaren MAXWELLSchen Theorie zusammen mit den Differentialgleichungen (6) und (7) die Lösungen eindeutig bestimmt. Die Materialgleichungen des Vakuums, das heißt des materiefreien Raums in der MAXWELLSchen Theorie lauten

$$j^{ik} = g^{il} g^{km} \varphi_{lm}. \quad (18)$$

Vergleichen wir Gl. (17) mit (18), so sehen wir, daß der Tensor Q^{ik} eine ähnliche Rolle wie der metrische Fundamentaltensor spielt. Allerdings steht in Gl. (17) noch ein anderer Ausdruck, der zu $\hat{\varphi}^{ik}$ proportional ist. Daß dieser Ausdruck die Analogie nicht stört, erkennt man, wenn man die Tensordivergenz von j^{ik} bildet. Die Gl. (7) kann mit Hilfe der ε -Größe zu

$$\hat{\varphi}^{ik}_{,k} = 0 \quad (19)$$

umgeformt werden. Der erste Term in Gl. (17) gibt also keinen Beitrag zur Wellengleichung. Wir könnten ihn ebensogut weglassen, die Differentialgleichung für q_{ik} lösen und dann am Ende die Funktionen j^{ik} wieder korrigieren. Bekanntlich ist es auch in der elementaren Theorie für die Wellengleichung gleichgültig, ob man

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} + N \mathfrak{E} \\ \mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} - N \mathfrak{H} \end{aligned} \quad (20)$$

schreibt.

Wir führen nun ein Vektorpotential A_i durch

$$q_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad (21)$$

ein und erhalten ebenso wie in der klassischen Theorie

$$Q^{ik} \frac{\partial^2 A_l}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (22)$$

und die LORENTZ-Bedingung

$$Q^{ik} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} = 0. \quad (23)$$

Wir werden nun für unsere Lösungsfunktionen ebene linearpolarierte monochromatische Wellen der Form

$$A_i \sim A_i \cos(k_i x_i) \quad (24)$$

ansetzen. Die Differentialgleichungen (22) und (23) reduzieren sich dann auf lineare algebraische Gleichungen

$$Q^{ik} k_i k_k = 0, \quad (25)$$

$$Q^{ik} k_i A_k = 0. \quad (26)$$

Um von den folgenden Gleichungen auch ihren anschaulichen Gehalt hervorzuheben, werden wir neben der Tensorschreibweise auch die dreidimensionale Vektorschreibweise verwenden. Dazu benötigen wir vor allem eine Zuordnung von Vektoren zu den Tensoren f^{ik} und φ_{ik} . Es ist zu beachten, daß in der verallgemeinerten Feldtheorie der elektrische Viererstrom in der rechten Seite der Gl. (2) auftritt und man daher f^{ik} mit $(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ und φ_{ik} mit $(\mathfrak{D}, \mathfrak{H})$ zu identifizieren hat. Man erhält dann

$$\mathfrak{E} = (f^{32}, f^{13}, f^{21}), \quad \mathfrak{B} = (f^{41}, f^{42}, f^{43}) \quad (27)$$

und

$$\mathfrak{D} = (\varphi_{32}, \varphi_{13}, \varphi_{21}), \quad \mathfrak{H} = (\varphi_{41}, \varphi_{42}, \varphi_{43}). \quad (28)$$

Einsetzen von Gl. (24) in Gl. (6) und (7) liefert dann

$$f^{ik} k_k = 0, \quad [\mathfrak{f} \mathfrak{E}] + k_4 \mathfrak{B} = 0, \quad (29)$$

$$\hat{\varphi}^{ik} k_k = 0, \quad [\mathfrak{f} \mathfrak{H}] - k_4 \mathfrak{D} = 0. \quad (30)$$

Die vierte Komponente von Gl. (6) und (7) hatten wir nicht in Vektorform angeschrieben, da sie für unsere harmonischen Wellen schon in den ersten drei Gleichungen enthalten ist.

Aus Gl. (29) und (17) folgt

$$Q^{ik} Q^{km} \varphi_{lm} k_k = 0 \quad (31)$$

und, da die Determinante von Q^{ik} ungleich Null ist, wie man unschwer zeigen kann,

$$s^m \varphi_{lm} = 0, \quad [s \mathfrak{D}] - s^4 \mathfrak{H} = 0 \quad (32)$$

mit der Abkürzung

$$s^m = Q^{km} k_k. \quad (33)$$

Führen wir den Tensor ε_{iklm} durch

$$\varepsilon_{iklm} = \begin{cases} +1 & (i, k, l, m) \text{ ungerade Perm.} \\ -1 & \text{gerade Perm.} \\ 0 & \text{zwei Indizes gleich} \end{cases} \quad (34)$$

ein, so können wir den zu f^{ik} dualen Tensor f_{ik} berechnen

$$\hat{f}_{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon_{iklm} f^{lm}. \quad (35)$$

Wir berechnen nun

$$\hat{f}_{pq} s^q Q^{pr} = \frac{1}{2W} \varepsilon_{pqik} Q^{pr} Q^{il} Q^{mk} Q^{qs} k_s \varphi_{lm}. \quad (36)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber die Determinante des Tensors Q^{ik} mal der zyklischen Divergenz von φ_{lm} , die nach Gl. (7) verschwindet. Folglich muß die linke Seite verschwinden. Da die Determinante Q^{ik} ungleich Null ist, folgt

$$\hat{f}_{pq} s^q = 0, \quad [s \mathfrak{B}] + s^4 \mathfrak{E} = 0. \quad (37)$$

Für das Folgende werden wir noch einige Komponenten des gewöhnlich nach MINKOWSKI benannten Energie-Impulstensors benötigen. Man erhält zum Beispiel

$$f^{i4} \varphi_{ik} = -\frac{J_2}{W} \hat{\varphi}^{i4} \varphi_{ik} + \frac{1}{W} Q^{il} Q^{4m} \varphi_{lm} \varphi_{ik}. \quad (38)$$

Der erste Term verschwindet wieder, denn für $k = 4$ ist dieser Term gerade die Determinante von φ_{ik} die notwendig Null ist [vgl. Gl. (32)] und für $k \neq 4$ heben sich alle Glieder weg. Führt man im zweiten Term wieder das Vektorpotential ein und nennt

$$\frac{1}{W} Q^{ik} A_i A_k = C, \quad (39)$$

so ergibt sich

$$f^{i4} \varphi_{ik} = s^4 k_k C \sin^2 (k_i x_i), \quad (40)$$

$$[\mathfrak{D} \mathfrak{B}] = \mathfrak{k} s^4 C \sin^2 (k_i x_i),$$

$$(\mathfrak{B} \mathfrak{S}) = -s^4 k_4 C \sin^2 (k_i x_i).$$

In ganz derselben Weise ergibt sich

$$f^{i4} \varphi_{i4} = s^k k_4 C \sin^2 (k_i x_i), \quad (41)$$

$$[\mathfrak{S} \mathfrak{E}] = s k_4 C \sin^2 (k_i x_i)$$

und

$$f^{ik} \varphi_{ik} = 0, \quad (42)$$

$$(\mathfrak{E} \mathfrak{D}) - (\mathfrak{S} \mathfrak{B}) = 0.$$

Nach Gl. (39) können wir die Konstante C den Absolutbetrag des Vektorpotentials nennen. Für verschwindendes Grundfeld geht Q^{ik} in g^{ik} über und man erhält die übliche Definition des Absolutbetrages eines Vierer-Vektors. Für diesen Grenzfall läßt sich leicht beweisen, daß die Konstante C negativ sein muß. Eine Transformation

$$A_k \rightarrow A_k + N k_k \quad (43)$$

mit willkürlichem konstanten N läßt sowohl die Feldstärken als auch die Konstante C invariant. Wir können also stets⁴

$$A_4 = 0 \quad (44)$$

annehmen. Für genügend schwaches Grundfeld steht also dann auf der linken Seite von Gl. (39) eine negativ definite Form und daraus folgt, daß C negativ ist.

Für beliebiges starkes Grundfeld kann man das auf folgende Weise zeigen. Wir betrachten die quadratische Form

$$Q^{ik} x_i x_k = q, \quad (45)$$

die für $q = 0$ und $x_i = k_i$ dasselbe wie Gl. (25) und für $q = C$ und $x_i = A_i$ dasselbe wie Gl. (39) aussagt. Nun führen wir ein spezielles Koordinatensystem ein, indem wir unsere x -Achse senkrecht zur elektrischen und magnetischen Feldstärke des Grundfeldes legen und die y - und z -Achse so wählen, daß $T^{23} = 0$ ist, was man immer erreichen kann. Der Tensor Q^{ik} nimmt dann die Form an

$$Q^{ik} = \begin{pmatrix} -(1 + J_1 - w) & 0 & 0 & \sqrt{w^2 - J^2} \\ 0 & -(1 + J_1 + J) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + J_1 - J) & 0 \\ \sqrt{w^2 - J^2} & 0 & 0 & + (1 + J_1 + w) \end{pmatrix}, \quad (46)$$

worin J_1 , J_2 und J die in Gl. (10) eingeführten Größen darstellen und w die „Energiedichte“ des Grundfeldes ist

$$w = \frac{1}{2} (\overline{\mathfrak{D}}^2 + \overline{\mathfrak{S}}^2). \quad (47)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung von Q^{ik} lautet nun die quadratische Form (45)

$$[(Q^{11}Q^{44} - (Q^{14})^2)x_1^2 + Q^{44}(Q^{22}x_2^2 + Q^{33}x_3^2) + (x_4Q^{44} + Q^{14}v_1)^2 - qQ^{44}]. \quad (48)$$

Aus Gl. (46) folgt unmittelbar

$$(Q^{14})^2 - Q^{11}Q^{44} = W^2 \quad (49)$$

und dieser Ausdruck muß natürlich immer positiv sein, wie wir schon in Gl. (11) stillschweigend voraussetzten. Daraus folgt übrigens eine gewisse Beziehung, die die Feldstärken des Grundfeldes zu erfüllen haben und die in l. c. angegeben wurde. Aus dieser Beziehung folgt auch, daß

$$Q^{22}Q^{44} < 0, \quad Q^{33}Q^{44} < 0 \quad (50)$$

sein muß. In der Gl. (48) für $v_i = A_i$ und $q = C$ können wir mit Hilfe der Transformation (43) mit

$$N(k_1Q^{44} + Q^{14}k_1) = A_4Q^{44} + Q^{14}A_1 \quad (51)$$

⁴ Dabei müssen wir allerdings $k_4 \neq 0$ annehmen: In jenem Bezugssystem, in dem die „Lichtwellen“ als statische Felder erscheinen, kann das skalare Potential nicht nach (43) wegtransformiert werden. Selbstverständlich ist auch für diese Felder $C > 0$.

den zweiten Klammersausdruck Null setzen, vorausgesetzt, daß

$$k_4 Q^{44} + Q^{14} k_1 \quad (52)$$

ungleich Null ist. Dies ist aber tatsächlich erfüllt, wie man sieht, wenn man die Gl. (48) für $x_i = k_i$ und $q = 0$ anschreibt. Aus Gl. (49) und (50) ersieht man, daß der erste Klammersausdruck in Gl. (48) stets negativ ist. Ist die Transformation (51) aber gerechtfertigt, so muß die Konstante C in Gl. (39) stets negativ sein.

Nachdem wir uns über das Vorzeichen von C Klarheit verschafft haben, können wir uns wieder den Gl. (40) bis (42) zuwenden. Die erste Vektorgleichung (40) gibt uns die „Impulsdichte“ der Lichtwelle und sagt aus, daß dieser Vektor dieselbe Richtung wie der Wellenvektor \mathfrak{k} hat. Die skalare Gl. (40) gibt die magnetische Energiedichte, die übrigen nach Gl. (42) gleich der elektrischen Energiedichte ist. Das Vorzeichen dieser Energiedichte ist positiv, wenn s^4 und k_4 das gleiche Vorzeichen haben. Gl. (41) gibt den Energiestrom, der die Richtung von s hat. Im nächsten Abschnitt werden wir die Vektoren \mathfrak{k} und s näher untersuchen und ihre Bedeutung vom Standpunkt der Wellenkinematik diskutieren.

III. Strahl- und Wellengeschwindigkeit.

In Gl. (24) haben wir uns auf ebene, einfach harmonische Wellen beschränkt, deren Wellenebene durch

$$k_i x_i = (\mathfrak{k} \mathfrak{x}) + k_4 t = \text{Const.} \quad (53)$$

gegeben ist. Daraus folgt unmittelbar, daß der drei-dimensionale Vektor, der von der früheren zur späteren Wellenebene zeigt, durch

$$\mathfrak{n} = -\frac{\mathfrak{k}}{k_4} \quad (54)$$

gegeben ist, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenphase durch

$$u = \frac{k_4}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}} \quad (55)$$

gegeben ist. Diese Geschwindigkeit ist offensichtlich nicht isotrop und die physikalisch interessantere Strahlgeschwindigkeit wird daher im allgemeinen verschieden von u sein⁵.

Zunächst kann man einfach zeigen, daß der Wellenvektor ein raumartiger Vektor ist. Man subtrahiert von Gl. (25) den Ausdruck

$$\delta^{ik} k_i k_k (1 + J_1 + J) = \text{Const.} \quad (6)$$

⁵ Selbst wenn sie isotrop wäre, aber verschieden von c , wäre die Strahlgeschwindigkeit von Interesse. Denn Isotropie ist kein invarianter Begriff (außer im Vakuum) und würde dann nur in einem Bezugssystem vorhanden sein. Man vergleiche dagegen den mathematischen Begriff der Isotropie eines Vektors (z. B. E. CARTAN, „Leçons sur la Théorie des Spineurs“ I. Paris, Hermann & Cie 1938): Ein Vektor ist isotrop, wenn sein Absolutbetrag Null ist.

und zeigt, daß die Konstante auf der rechten Seite stets negativ ist. Da $(1 + J_1 + J)$ aber sicher positiv ist, muß k_i raumartig sein. Nach Gl. (55) ist dann die Phasengeschwindigkeit stets kleiner als die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Es folgt daraus, daß es im allgemeinen möglich ist, die Lichtwelle auf Ruhe zu transformieren.

Betrachten wir nun die Wellenebenen Gl. (53). Geben wir uns einen mit Gl. (25) verträglichen Vektor k_i vor, so erhalten wir eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit (Hyperebene), die uns die zweidimensionale Wellenebene zu allen Zeitpunkten gibt.

Der Normalenvektor auf diese Wellenebene muß also auf der Hyperfläche Gl. (25) liegen, die von zweiter Ordnung ist. Es ist leicht zu sehen, daß es sich dabei um eine Kegelfläche handelt. Die Gesamtheit der Wellenebenen werden daher wieder einen Kegel einhüllen, den man den Strahlenkegel nennt. Die Schnitte dieses Strahlenkegels mit der Hyperebene $t = \text{const.}$ geben uns die Einhüllenden der Wellenebenen im üblichen dreidimensionalen Raume.

Den Strahlenkegel erhalten wir in folgender Weise. Wir betrachten zwei benachbarte Wellenebenen, deren Normalenvektor k_i und $k_i + \delta k_i$ seien. Die Bedingung, daß beide Wellenvektoren der Gl. (25) genügen sollen, ergibt, wenn $\delta k_i \cdot \delta k_k$ vernachlässigt wird,

$$Q^{ik} k_i \delta k_k = 0. \quad (57)$$

Wir verlangen ferner, daß beide Wellenflächen zur selben Phase gehören mögen. Nach Gl. (53) folgt dann

$$x_i \delta k_i = 0. \quad (58)$$

Die kleinen Verschiebungen, die wir dem Wellenvektor erteilen, sind noch bis zu einem gewissen Grade willkürlich. Wählen wir etwa $\delta k_1 \neq 0$, so können wir diese Verschiebung auf drei verschiedene Weisen, nämlich durch entsprechende Verschiebungen von k_2, k_3, k_4 kompensieren. Dabei sehen wir von etwaigen singulären Punkten ab, und setzen insbesondere $Q^{1i} k_i \neq 0$ voraus. Wir erhalten nun einfach für den speziellen Ortsvektor x_i , der auf der Einhüllenden der Wellenebenen liegt, den schon in Gl. (33) eingeführten Vektor s^i multipliziert mit einem beliebigen Proportionalitätsfaktor, den wir im folgenden gleich eins setzen wollen. Es gilt natürlich

$$s^i k_i = 0, \quad (59)$$

Strahlvektor und Wellenvektor sind also orthogonal. Um die Gleichung der Strahlenfläche zu erhalten, berechnen wir zuerst die Umkehrung von Gl. (33). Da der Tensor Q^{ik} nicht singulär ist, gibt es einen inversen P_{ik} mit

$$Q^{ik} P_{il} = \delta^k_l \quad (60)$$

und es folgt

$$k_i = P_{ik} s^k. \quad (61)$$

Setzen wir das in Gl. (33) ein

$$P_{ik} s^i s^k = 0. \quad (62)$$

Für P_{ik} findet man leicht

$$P_{ik} = \frac{1}{W} [(1 + J_1) \delta_{ik} - T_{ik}] \quad (63)$$

wenn man die Beziehung

$$T_{ik} T^{il} = J^2 \delta_k^l \quad (64)$$

benutzt. Subtrahieren wir von Gl. (62) den Ausdruck

$$(1 + J_1 - J) \delta_{ik} s^i s^k = \text{const.}, \quad (65)$$

so finden wir ebenso wie früher für den Vektor k_i den raum-zeitartigen Charakter des Vektors s^i . Es ergibt sich aber hier, daß s^i zeitartig ist

$$s^i s_i > 0. \quad (66)$$

Es muß also s^4 stets ungleich Null sein.

Wir müssen nun zeigen, wie man die Strahlgeschwindigkeit erhält. Führen wir in Gl. (59) den Vektor n nach Gl. (54) ein, dessen Absolutbetrag gerade das Reziproke der Phasengeschwindigkeit u ist.

$$(s \ n) = s^4. \quad (67)$$

Nach einer wohlbekannten geometrischen Überlegung folgt daraus, daß die Strahlgeschwindigkeit durch

$$v = \left| \frac{s}{s^4} \right| \quad (68)$$

gegeben ist. Wir werden im folgenden den Vektor

$$v = \frac{s}{s^4} \quad (69)$$

eingeführen.

Nach Gl. (59) ist

$$(v \ n) = 1, \quad (70)$$

beide Vektoren schließen also einen spitzen Winkel ein. Der Vektor v zeigt also in die Fortpflanzungsrichtung des Strahls.

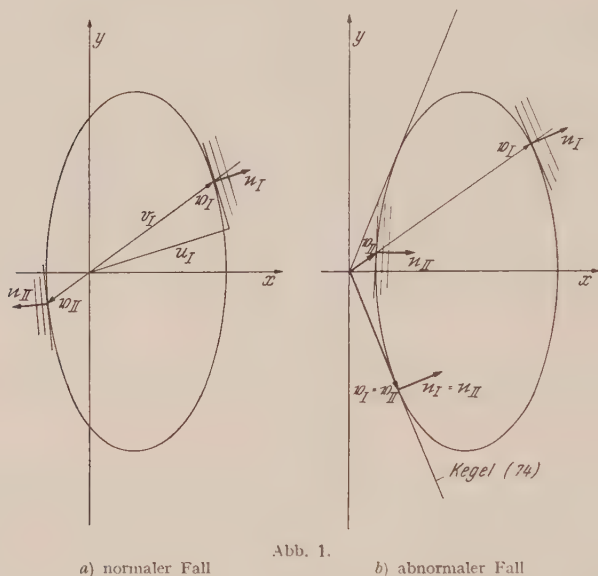
In dem früher eingeführten speziellen Koordinatensystem, in dem nur die x -Komponente des POYNTING-Vektors des Grundfeldes ungleich Null ist, der Tensor T^{ik} aber sonst diagonal ist, lautet die Gl. (62) mit (69)

$$\left(1 + \frac{J_1 + w}{W^2}\right)^2 \left(v_x - \frac{\sqrt{w^2 - J^2}}{1 + J_1 - u^2}\right)^2 + \frac{1 + J_1 + w}{1 + J_1 + J} v_y^2 + \frac{1 + J_1 + w}{1 + J_1 - J} v_z^2 = 1. \quad (71)$$

Dies ist die Gleichung der Einhüllenden der Wellenfronten nach der Zeit $t = 1$. Es ist die Gleichung eines dreiachsigen Ellipsoides, dessen Mittelpunkt in der Richtung des POYNTING-Vektors des Grundfeldes, also hier in der x -Richtung verschoben ist. Ist der POYNTING-Vektor des Grundfeldes Null, so ist auch die Verschiebung des Ellipsoides Null und die Strahlgeschwindigkeit ist zwar noch anisotrop, aber doch „umkehrbar“. Für verschwindendes Grundfeld verschwindet natürlich auch die Anisotropie.

In Gl. (71) wollen wir zwischen dem normalen und dem abnormalen Fall unterscheiden. Im ersteren umschließt das Ellipsoid den Ursprung und die Lichtstrahlen pflanzen sich nach allen Richtungen fort. Im zweiten Fall ist die Verschiebung des Mittelpunktes des Ellipsoides größer als deren x -Halbachse und die Lichtstrahlen können sich nur innerhalb eines Kegels ausbreiten. Es ist leicht aus Gl. (71) abzuleiten, daß für den abnormalen Fall die Ungleichung

$$w > 1 + J_1 \quad (72)$$



a) normaler Fall

Abb. 1.

b) abnormaler Fall

charakteristisch ist. In Abb. 1 sind die Strahlenflächen sowohl für den normalen als auch den abnormalen Fall gezeichnet. Zu jedem Radiusvektor v gehört ein Vektor n der senkrecht auf die Wellenfront steht. Im abnormalen Fall gibt es offensichtlich zu einer gegebenen Richtung zwei Strahlen, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Die Wellenfront hat natürlich für die beiden Strahlen eine verschiedene Lage. Am Mantel des oben erwähnten Kegels stehen v und \mathfrak{f} senkrecht für beide Strahlen, die übrigens dann auch die gleiche Geschwindigkeit haben. Nach der aus Gl. (59) folgenden Gleichung

$$(v \mathfrak{f}) = -k_4 \quad (73)$$

muß dann $k_4 = 0$ gelten, die „Lichtstrahlen“ bestehen dann aus statischen Wellenzügen — das Licht ist auf Ruhe transformiert.

Die Gleichung dieses Kegels lautet

$$\frac{v_x^2}{1 + J_1 - w} + \frac{v_y^2}{1 + J_1 + J} + \frac{v_z^2}{1 + J_1 - J} = 0. \quad (74)$$

Es ist dies die Einhüllende der Strahlenflächen nach der Zeit $t = 1, 2, \dots$. Die Gl. (74) gibt die einzig möglichen Richtungen an, in denen die Lichtgeschwindigkeit Null ist. Setzt man nämlich in Gl. (25) und (61) $k_4 = 0$ und ersetzt die anderen Komponenten von k_i durch s^i , so erhält man gerade die Gl. (74).

Wir wollen nun zeigen, daß im normalen Fall s^4 und k_4 das gleiche Vorzeichen haben, während sie im abnormalen Fall entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wir lösen die quadratische Gl. (25) nach k_4 und benützen der Einfachheit halber die allgemeine Form und nicht die spezielle Form (46)

$$Q^{44} k_4 = -Q^{4e} k_e \pm \sqrt{(Q^{4e} k_e)^2 - Q^{44} Q^{e\tau} k_e k_\tau}. \quad (75)$$

Die griechischen Indizes gehen von 1 bis 3. Im normalen Fall haben die beiden Wurzeln verschiedenes Vorzeichen. Denn es ist dann

$$Q^{e\tau} k_e k_\tau < 0. \quad (76)$$

Die beiden Wurzeln entsprechen der nach $+t$ ($k_4 < 0$) fortschreitenden Welle und der nach $-t$ (für $k_4 > 0$) fortschreitenden Welle im normalen Fall. Im abnormalen Fall kann die quadratische Form (76) auch positiv sein und die beiden Wurzeln k_4 haben das gleiche Vorzeichen. Wir können dann von der „schnelleren“ und „langsameren“ Welle sprechen. Vergleichen wir Gl. (75) mit (33) für $m = 4$, so finden wir

$$s^4 = \pm \sqrt{(Q^{4e} k_e)^2 - Q^{44} Q^{e\tau} k_e k_\tau}, \quad (77)$$

die beiden Wellen können also durch das Vorzeichen von s^4 charakterisiert werden. Da normalerweise das Vorzeichen von k_4 durch das der Wurzel in Gl. (75) bestimmt ist, gilt dann

$$s^4 k_4 > 0. \quad (78)$$

Im abnormalen Fall gilt statt dessen

$$\begin{array}{ll} s^4 k_4 > 0 & \text{schnellere Welle,} \\ s^4 k_4 < 0 & \text{langsamere Welle.} \end{array} \quad (79)$$

IV. Diskussion.

Allein auf Grund der Tatsache, daß in dieser Theorie die MAXWELLSchen Gleichungen in der elementaren Form gelten, müssen für eine monochromatische, ebene, linear polarisierte Lichtwelle die Gleichungen

$$\begin{aligned} [n \mathfrak{E}] &= \mathfrak{B}, \\ [\mathfrak{H} n] &= \mathfrak{D} \end{aligned} \quad (80)$$

erfüllt sein, worin n den Normalenvektor der Wellenflächen bezeichnet, der von der früheren zur späteren Wellenebene zeigt. Der nichtlineare Zusammenhang zwischen den beiden in Gl. (80) vorkommenden Tensoren wird für genügend schwache Wellen durch einen linearen Ausdruck approximiert. Es ist aber bemerkenswert, daß in dieser Theorie der lineare Zusammenhang durch eine Gleichung der Form

$$j^{ik} = Q^{il} Q^{km} q_{lm} \quad (81)$$

gegeben ist und nicht etwa durch die allgemeinere Gleichung

$$j^{ik} = Q^{iklm} q_{lm}. \quad (82)$$

Diese Entartung hat zur Folge, daß der Wellenvektor einer quadratischen Gleichung und nicht einer von vierter Ordnung genügt und folglich, daß die Strahlenfläche nur von zweiter Ordnung ist. In Kristallen, deren Materialgleichungen die Form (82) hat, gibt es in jeder Richtung zwei Strahlen — auch im normalen Fall. Man würde im abnormalen Fall in jeder (erlaubten) Richtung vier Strahlen erwarten. In Kristallen ist weiters die Polarisation der Lichtwellen bestimmt. In unserem Fall ist das Vektorpotential in einer Ebene [Gl. (26)] frei wählbar. Auch dies ist eine Konsequenz der Entartung unserer Materialgleichungen (81).

Mit Hilfe des Strahlvektors \mathfrak{v} können wir schreiben

$$\begin{aligned} [\mathfrak{v} \mathfrak{D}] &= \mathfrak{H}, \\ [\mathfrak{v} \mathfrak{B}] &= -\mathfrak{E}. \end{aligned} \quad (83)$$

Diese Gleichungen geben uns die Umkehrung von Gl. (80). Während aus Gl. (80) folgte, daß \mathfrak{D} und \mathfrak{B} senkrecht auf \mathfrak{n} oder \mathfrak{f} sind, können wir nun aus Gl. (83) schließen, daß \mathfrak{E} und \mathfrak{H} senkrecht aus \mathfrak{v} oder \mathfrak{s} sind. Berechnet man die Größen, die in der MINKOWSKISCHEN Theorie bewegter Körper mit Impulsdichte, Energiestrom und Energiedichte des elektromagnetischen Feldes identifiziert werden, so findet man

$$\begin{aligned} [\mathfrak{B} \mathfrak{D}] &= n k_4 s^4 C \sin^2(k_i x_i), \\ [\mathfrak{H} \mathfrak{E}] &= v k_4 s^4 C \sin^2(k_i x_i), \\ \frac{1}{2} ((\mathfrak{E} \mathfrak{D}) + (\mathfrak{H} \mathfrak{B})) &= -s^4 k_4 C \sin^2(k_i x_i). \end{aligned} \quad (84)$$

In der elementaren Theorie gibt der Vektor \mathfrak{n} die Richtung des Impulses, der Vektor \mathfrak{v} die Richtung des Energiestroms. Allerdings gilt das nur, wenn die Energiedichte positiv ist. Daß die Energiedichte in extremen Fällen auch in der klassischen Theorie negativ werden kann ist bekannt⁶. In diesem Fall ist dann der Wellennormalevektor entgegengesetzt gleich dem Impulsvektor und ebenso der Strahlvektor entgegengesetzt dem POYNTING-Vektor.

Wir können dasselbe auch anders ausdrücken: Im normalen Fall bilden die Vektoren \mathfrak{D} , \mathfrak{B} und \mathfrak{n} ein Rechtssystem, im abnormalen Fall dagegen ein Linkssystem. Allerdings müssen wir dabei erinnern, daß \mathfrak{B} im allgemeinen nicht senkrecht auf \mathfrak{D} steht. Statt $(\mathfrak{D}, \mathfrak{B}, \mathfrak{n})$ können wir natürlich auch das Vektortriplett $(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{v})$ verwenden.

Während in der klassischen Theorie bewegter Medien der abnormale Fall dann entsteht, wenn die Geschwindigkeit des Mediums größer als die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium ist, ist in unserem Fall offensichtlich die Größe des POYNTING-Vektors des Grundfeldes ausschlaggebend. Im abnormalen Fall ist der POYNTING-Vektor so groß, daß die schwachen Lichtwellen nicht mehr gegen ihn anlaufen können. Alle Strahlen bilden dann mit dem POYNTING-Vektor des Grundfeldes einen spitzen Winkel

⁶ M. v. LAUE, Die Relativitätstheorie. I. Bd., 5. Aufl., Fr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1952, p. 141. Auch Zeits. f. Phys. 128, 387 (1950).

Über die Bewegung eines Massenpunktes in einem widerstehenden Mittel veränderlicher Dichte.

Von

E. Leimanis

(Department of Mathematics, The University of British Columbia, Vancouver, B. C.)

(Eingelangt am 30. Oktober 1952)

Herr SEXL¹ hat sich kürzlich mit der Integration der Bewegungsgleichung eines Massenpunktes in einem widerstehenden Mittel befaßt, dessen Dichte mit der Höhe exponentiell abnimmt. Wählt man die z -Achse positiv nach unten in der Schwerkraft und nimmt man den Luftwiderstand proportional der Dichte und einer Potenz der momentanen Geschwindigkeit an, dann lautet die Bewegungsgleichung eines frei fallenden Massenpunktes wie folgt:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g - ke^{\alpha z} \left(\frac{dz}{dt} \right)^n \quad (g = \text{const.}).$$

Herr SEXL betrachtet insbesondere die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ und gibt in geschlossener Form Lösungen dieser Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $z = H$, $dz/dt = 0$ für $t = 0$.

Unter Annahme veränderlicher Schwerebeschleunigung $g(z)$ soll im nachfolgenden auf einen neuen durch Quadraturen integrierbaren Fall hingewiesen werden. Nämlich:

$$n = -2 : \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g(z) - ke^{\alpha z} \left(\frac{dz}{dt} \right)^{-2}.$$

Der Ansatz

$$\frac{dz}{dt} = p$$

führt erst zu der Differentialgleichung

$$p \frac{dp}{dz} = g(z) - ke^{\alpha z} p^{-2}.$$

Die weitere Substitution

$$p = \frac{1}{y^{1/2}}$$

¹ TH. SEXL, Acta Physica Austriaca 5, 148—151 (1951).

ergibt dann die ABELSche Differentialgleichung erster Art

$$\frac{dy}{dz} = -2g(z)y^2 + 2ke^{az}y^3. \quad (1)$$

Schreibt man allgemein die ABELSche Differentialgleichung erster Art in der Form

$$\frac{dy}{dz} = f_0(z) + f_1(z)y + f_2(z)y^2 + f_3(z)y^3, \quad (1')$$

so hat man

$$f_0 \equiv 0, \quad f_1 \equiv 0, \quad f_2 = -2g(z), \quad f_3 = 2ke^{az}.$$

Ist dann²

$$\left(\frac{f_3}{f_2}\right)' = -a f_2 \quad (2)$$

für eine gewisse Konstante a , so geht die Differentialgleichung (1') durch die Substitution

$$y = \frac{f_2}{f_3} u(z)$$

in die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

$$\frac{du}{dz} = \frac{f_2^2}{f_3} (u^3 + u^2 - au) \quad (3)$$

über.

Vollständig ausgeschrieben nimmt die Differentialgleichung (2) die Form einer BERNOULLISchen Gleichung für $g(z)$ an

$$g' - ag - 2\frac{a}{k}e^{-az}g^3 = 0,$$

welche durch die Substitution

$$w(z) = \frac{1}{g^2(z)} \quad (4)$$

in die lineare Differentialgleichung

$$w' + 2aw + \frac{4a}{k}e^{-az} = 0$$

übergeführt wird. Nachdem man diese gelöst hat, bekommt man für $g^2(z)$, unter Beachtung der Substitution (4), den Ausdruck

$$g^2(z) = \frac{e^{2az}}{-\frac{4a}{ak}e^{az} + C}. \quad (5)$$

² A. CHIellini, Bollettino Unione Mat. Italiana 10, 301—307 (1931); vergl. auch KAMKE, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. 1, 2. Aufl., Akad. Verlagsges. Leipzig, 1943, S. 26.

Bezeichnet man mit g die Schwerebeschleunigung an der Erdoberfläche ($z = 0$), so ergibt sich aus Gl. (5) die Integrationskonstante C zu

$$C = \frac{1}{g^2} \left(1 + \frac{4a}{a k} g^2 \right). \quad (6)$$

Befindet sich der Massenpunkt um die Strecke H , gemessen auf dem Erdradius R , von der Erdoberfläche entfernt, so sinkt der Wert der Schwerebeschleunigung nach dem NEWTONSchen Anziehungsgesetz auf

$$g(H) = g \frac{R^2}{(R + H)^2} \quad (7)$$

ab. Aus Gl. (7) und Gl. (5) für $z = H$, unter Beachtung von Gl. (6), bekommt man für a den Wert

$$a = \frac{\alpha k}{4 g^2} \left[\left(1 + \frac{H}{R} \right)^4 e^{2\alpha H} - 1 \right] \frac{1}{1 - e^{\alpha H}}. \quad (8)$$

Substituiert man die Ausdrücke Gl. (6) und (8) in Gl. (5), so ergibt sich für $g^2(z)$ der Ausdruck

$$g^2(z) = \frac{g^2 (1 - e^{\alpha H}) e^{2\alpha z}}{1 - e^{\alpha H} + \left[\left(1 + \frac{H}{R} \right)^4 e^{2\alpha H} - 1 \right] (1 - e^{\alpha z})}.$$

Mit diesem Ausdruck für $g^2(z)$ nimmt die Gl. (3) mit getrennten Veränderlichen die endgültige Form

$$\frac{du}{u(u^2 + u - a)} = \frac{2}{k} \frac{g^2(z)}{e^{\alpha z}} dz$$

an. Die Integration der letzten Differentialgleichung bereitet keine Schwierigkeiten.

Zur Thermodynamik der Phasenumwandlungen I. Heterobare Phasenübergänge in Einstoffsystemen.

Von

Günther Porod.

Aus dem Institut für theoretische und physikalische Chemie der Universität Graz.

Mit 2 Abbildungen.

(Eingelangt am 30. Oktober 1952.)

Zusammenfassung.

Es werden heterobare Phasenumwandlungen thermodynamisch diskutiert, das heißt solche, wo zwei Phasen unter verschiedenem Druck stehen. Eine einfache Differentialgleichung analog derjenigen von CLAUSIUS-CLAPEYRON wird abgeleitet und die Widerspruchsfreiheit bewiesen. Es wird gezeigt, daß Schmelzen eines Festkörpers unter lokalem Druck auch unterhalb des normalen Schmelzpunktes thermodynamisch möglich ist.

1. Problemstellung.

Die Phasenumwandlungen bei Einstoffsystemen scheinen heute kaum noch thermodynamische Probleme zu bieten. Ein vollständiges Phasen- (P, T) -Diagramm liefert jede gewünschte Auskunft über die Existenzgebiete der möglichen Phasen und die Bedingungen, unter denen Gleichgewichte zwischen solchen bestehen können. Die Umwandlungskurven werden bei Kenntnis der nötigen Daten durch die bekannte Gleichung von CLAUSIUS-CLAPEYRON eindeutig beschrieben. Daneben gibt es allerdings noch Fragen von meist geringerer praktischer Wichtigkeit, die auf Grund eines (P, T) -Diagramms nicht immer beantwortet werden können, wie z. B. das Verhalten einer in einem konstanten Volumen eingeschlossenen Substanz bei Änderung der Temperatur und anderes mehr. Aber auch abgesehen davon ist das Phasendiagramm an die Voraussetzung gebunden, daß die koexistierenden Phasen unter dem gleichen Druck stehen (isobare Umwandlungskurven). Das ist nun keineswegs eine notwendige Bedingung für ein thermodynamisches Gleichgewicht. Wenn wir z. B. den Sättigungsdampfdruck über einer Wasserfläche in freier Natur betrachten, dann müßten wir streng genommen berücksichtigen, daß das Wasser unter Atmosphärendruck steht, während der Partialdruck des Wasserdampfes bei normalen Temperaturen sehr gering

ist. Die dadurch bedingte Abweichung von der isobaren Dampfdruckkurve ist allerdings so minimal, daß man mit Recht davon absehen kann. Sie ist nur dann zu berücksichtigen, wenn es um prinzipielle Fragen geht, z. B. die thermodynamisch selbstverständliche Gleichheit der Dampfdrucke über zwei kondensierten Phasen in jedem Punkt ihrer Umwandlungskurve zu beweisen.

Immerhin sind auch Fälle denkbar, wo die Abhängigkeit der Gleichgewichtsbedingungen von den verschiedenen Drucken der beiden Phasen zu praktisch ins Gewicht fallenden Resultaten führt. In dieser Mitteilung soll daher versucht werden, die thermodynamischen Bedingungen für solche „heterobare“ Phasenumwandlungen, wie wir sie kurz nennen wollen, zu untersuchen. Es ist vielleicht nicht überflüssig zu betonen, daß es sich dabei um thermodynamisch definierte Probleme handelt und man mit gutem Sinn von reversiblen Übergängen sprechen darf. Die praktische Realisierbarkeit solcher heterobarer Phasenumwandlungen ist natürlich eine Sache für sich und kann nur für jeden Fall gesondert behandelt werden.

2. Die heterobare Dampfdruckkurve.

Nach der GIBBSschen Phasenregel kann ein reiner Stoff bei bestimmtem Druck und bestimmter Temperatur im allgemeinen nur eine Phase bilden. Ist der äußere Druck höher als der Dampfdruck bei der betreffenden Temperatur, dann kann keine Gasphase vorhanden sein. Falls aber noch eine Atmosphäre eines bezüglich der Substanz inerten Gases vorhanden ist, stellt sich ein Partialdruck ein, der hier die Rolle des Dampfdruckes vertritt und im allgemeinen diesem gleichgesetzt wird. Es handelt sich dabei um keinen Verstoß gegen die Phasenregel, weil dann das System genau genommen aus zwei Komponenten besteht. Es ist aber einfacher, auch in diesem Fall nur von einem Einstoffsystem zu sprechen, da das Fremdgas ja nur die Rolle eines Drucküberträgers spielt und sonst mit der Substanz in keine Wechselwirkung tritt. Den Partialdruck, den wir im folgenden ebenfalls als Dampfdruck bezeichnen werden, müssen wir als den Druck definieren, der sich in einem evakuierten Gefäß einstellen würde, das durch eine für den Dampf, nicht aber für das Fremdgas, durchlässige Wand mit dem Gasraum des Systems verbunden ist.

Es fragt sich nun, welche Beziehung zwischen Druck- und Temperaturänderung in diesem Falle, der ja in der Praxis häufiger vorliegt als der durch das Phasendiagramm beschriebene, an Stelle der Gleichung von CLAUSIUS-CLAPEYRON gilt. Um diese Frage zu beantworten, führen wir einen idealen Kreisprozeß folgender Art durch: Die Flüssigkeit sei in einem Zylinder zusammen mit einem inerten Fremdgas eingeschlossen und das ganze System werde auf konstanter Temperatur T und mit Hilfe eines dicht schließenden Kolbens unter dem konstanten Druck P gehalten. Unter diesen Bedingungen soll sich der Dampfdruck p einstellen. Um den Kreisprozeß durchführen zu können, be-

nötigen wir noch ein zweites derartiges System, das sich ebenfalls im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, aber mit infinitesimal veränderten Parametern $T + dT$, $P + dP$, $p + dp$. Das Molvolumen der Flüssigkeit sei V , bzw. $(V + dV)$, das Molvolumen des Dampfes v , bzw. $(v + dv)$. Wir verdampfen nun reversibel im zweiten Zylinder ein Mol und entnehmen den gebildeten Dampf durch eine semipermeable Wand. Da dabei das Volumen $(V + dV)$ unter dem Druck $(P + dP)$ verschwindet und das Gasvolumen $(v + dv)$ gegen den Druck $(p + dp)$ entsteht, ist die reversible Arbeit für diesen Teilvorgang in altruistischer Vorzeichengebung gleich: $A_{rev} = (P + dP)(V + dV) - (p + dp)(v + dv)$. Nun wird der Dampf auf den Druck p und die Temperatur T gebracht, was durch eine geeignete Kombination eines adiabatischen mit einem isothermen Prozeß immer möglich ist. Die reversible Arbeit ist $p dv$. Hierauf wird der entspannte Dampf durch eine semipermeable Wand in den ersten Zylinder überführt und dort kondensiert. Die reversible Arbeit ist analog wie oben: $A_{rev} = p v - P V$. Nun wird das kondensierte Mol Flüssigkeit dem ersten Zylinder unter dem Druck P entzogen, wozu keine Arbeit nötig ist, mit der Arbeit $-P dV$ auf das Volumen $(V + dV)$ und die Temperatur $(T + dT)$ gebracht und wieder arbeitslos in den zweiten Zylinder überführt. Damit ist der Ausgangszustand wieder hergestellt. Die gesamte reversible Arbeit des Kreisprozesses ergibt sich durch Summation über die Teilbeträge zu: $A_{rev} = V dP - v dp$. Da nur Isothermen und Adiabaten vorgekommen sind, handelt es sich um einen CARNOT-Prozeß und die gewonnene Arbeit $-A_{rev}$ muß gleich sein der bei der oberen Isotherme zugeführten Wärmemenge Q (der Verdampfungswärme) mal dem Wirkungsgrad dT/T , so daß wir erhalten:

$$v dp - V dP = Q dT/T \quad (1)$$

Diese Gleichung gilt offenbar nicht nur für die Verdampfung einer Flüssigkeit, sondern auch für die Sublimation einer beliebigen festen Phase. Halten wir die kondensierte Phase unter konstantem Druck P , dann vereinfacht sich Gl. (1) weiter zu:

$$v dp = Q dT/T, \quad \text{bzw.} \quad dp/dT = Q/Tv \quad (2)$$

also eine Beziehung sehr ähnlich derjenigen von CLAUSIUS-CLAPEYRON. Diese ist ebenfalls als Spezialfall in Gl. (1) enthalten und folgt sofort, wenn wir $P = p$ und damit $dP = dp$ setzen. Sie gilt aber offenbar auch dann, wenn P und p sich um einen konstanten Betrag unterscheiden.

Durch die Differentialgleichung (2) ist die Dampfdruckkurve einer Flüssigkeit unter konstantem Druck P festgelegt, sobald wir die Lage eines Punktes der Kurve kennen. Das ist nun immer der Fall, denn beim Siedepunkt ($p = P$) muß sich die heterobare Dampfdruckkurve mit der normalen (isobaren) schneiden (Abb. 1). Der faktische Unterschied zwischen beiden Kurven ist nun für eine Flüssigkeit unter Atmosphärendruck äußerst gering, so daß man mit Recht immer mit

der isobaren Dampfdruckkurve rechnet. Der Druckunterschied zwischen beiden Kurven bei einer bestimmten Temperatur folgt sofort aus der allgemeinen Gl. (1) durch Nullsetzen von dT :

$$v dp = V dP; \quad T = \text{const.} \quad (3)$$

eine bekannte Beziehung, die besagt, daß sich die Änderungen der Gleichgewichtsdrucke bei konstanter Temperatur umgekehrt wie die entsprechenden Volumina verhalten. Beim Tripelpunkt des Wassers z. B. ist das Verhältnis $V : v$ etwa gleich 1 : 200 000. Da der

Schmelzpunkt des Eises bei Atmosphärendruck etwa eine Atmosphäre höher liegt als der Tripelpunkt, macht die dadurch bewirkte Erhöhung des Dampfdruckes etwa $0,000\,005 \text{ at} = 0,0038 \text{ mm Hg}$, also minimal wenig aus. Immerhin wird dadurch bewirkt, daß die Dampfdrucke von Eis und Wasser beim Schmelzpunkt einander gleich werden, was im Phasendiagramm nicht zum Ausdruck kommt. Wir wollen ganz allgemein zeigen, daß bei jedem beliebigen Umwandlungspunkt zwischen zwei kondensierten

Phasen die Dampfdrucke beider Phasen exakt gleich werden. Da es sich hier um eine bekannte und thermodynamisch selbstverständliche Tatsache handelt, kann das Ergebnis als Verifikation der allgemeinen Gl. (1) und damit auch der spezielleren Gl. (2) betrachtet werden.

Wir nehmen zunächst an, bei einem bestimmten Umwandlungspunkt beim Druck P und der Temperatur T seien die Dampfdrucke der beiden Phasen (unterschieden durch Indizes 1 und 2) als gleich festgestellt. Dann gilt für einen infinitesimal verschobenen Umwandlungspunkt nach Gl. (1):

$$v dp_1 - V_1 dP = Q_1 dT/T, \quad \text{bzw.} \quad v dp_2 - V_2 dP = Q_2 dT/T$$

für die Änderung der jeweiligen Dampfdrucke. Die Subtraktion beider Gleichungen liefert:

$$v (dp_1 - dp_2) - dP (V_1 - V_2) = (Q_1 - Q_2) dT/T.$$

Da dP und dT durch die Gleichung von CLAUSIUS-CLAPEYRON verknüpft sind, wobei die Umwandlungswärme der Phase 1 in Phase 2 nach dem ersten Hauptsatz gleich $(Q_1 - Q_2)$ sein muß, gilt gleichzeitig: $dP (V_2 - V_1) = (Q_1 - Q_2) dT/T$. Durch Vergleich mit dem vorstehenden Ergebnis sehen wir, daß dp_1 gleich dp_2 sein muß; das heißt wenn die Gleichheit der Dampfdrucke für einen Umwandlungs-

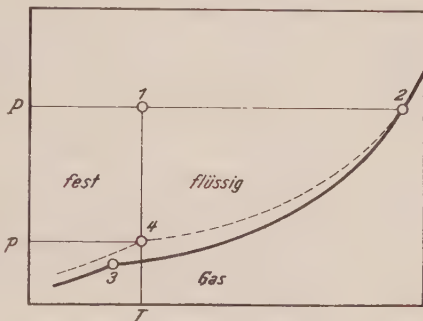


Abb. 1. Schematisches Phasendiagramm eines Einstoffsystems. — isobare Phasengrenzlinien, — — — heterobare Dampfdruckkurve für konstanten Druck = P der kondensierten Phasen.

1 Schmelzpunkt, 2 Siedepunkt, 3 Tripelpunkt, 4 Gemeinsamer Dampfdruck beim Schmelzpunkt. (Erhöhung des Dampfdrucks stark übertrieben gezeichnet.)

punkt erfüllt ist, dann gilt sie auch für einen benachbarten und so fort und damit für alle Punkte der Umwandlungskurve. Nun sind beim Tripelpunkt sicher beide Dampfdrucke gleich, womit die Behauptung bewiesen ist.

3. Die allgemeine heterobare Umwandlungskurve.

Es ist leicht einzusehen, daß Gl. (1) m. m. für beliebige Phasenumwandlungen Geltung hat und es ließe sich dies auch durch entsprechende Abänderung des Kreisprozesses zeigen. Es ist aber vielleicht zweckmäßig, diesmal eine formal thermodynamische Ableitung zu geben, um gleichzeitig eine Kontrolle des bisherigen Ergebnisses zu haben.

Wir denken uns also zwei Phasen desselben Stoffes (V_1, P_1 , bzw. V_2, P_2) bei derselben Temperatur T . Die Bedingung für das thermodynamische Gleichgewicht lautet: $F_1 = F_2$; das heißt die molare freie Energie (GIBBSches Potential) beider Phasen muß gleich sein. Betrachten wir nun einen Zustand mit infinitesimaler Änderung der Parameter: dT, dP_1, dP_2 . Die Änderungen der freien Energie sind:

$$dF_1 = V_1 dP_1 - S_1 dT$$

$$dF_2 = V_2 dP_2 - S_2 dT$$

Soll nun wieder Gleichgewicht herrschen, dann muß gelten: $dF_1 = dF_2$, woraus folgt: $V_2 dP_2 - V_1 dP_1 = (S_2 - S_1) dT$. Die Entropiedifferenz ist bei einem isotherm reversiblen Vorgang gleich der aufgenommenen Wärmemenge (hier die Umwandlungswärme Q_{12}) gebrochen durch die Temperatur T . Damit erhalten wir:

$$V_2 dP_2 - V_1 dP_1 = Q_{12} dT/T \quad (4)$$

und für den Spezialfall, daß P_2 konstant (z. B. auf Atmosphärendruck) gehalten wird:

$$V_1 dP_1 = -Q_{12} dT/T \quad (5)$$

in voller Analogie zu den Gln. (1) und (2) des vorigen Abschnitts. Der Anschluß an das Phasendiagramm ist wieder dadurch gegeben, daß die heterobare Umwandlungskurve den Punkt bei $P_1 = P_2$ mit der entsprechenden isobaren Umwandlungskurve gemeinsam haben muß.

Obige Formeln gelten zwar für beliebige heterobare Phasenumwandlungen, doch ist deren technische Realisierung im allgemeinen nur schwer vorstellbar. Wir wollen deshalb im folgenden etwas spezieller nur die heterobare Schmelzkurve diskutieren. Wir erkennen zunächst, daß die Abweichung von der isobaren Schmelzkurve durchaus bedeutend ist. Da in Gl. (5) nur das Volumen der festen Phase und nicht wie in der Gleichung von CLAUSIUS-CLAPEYRON die Differenz der Volumina eingeht, nimmt auf der heterobaren Schmelzkurve stets die

Temperatur mit zunehmendem Druck ab, und zwar ist die Änderung im Absolutbetrag schätzungsweise um eine Zehnerpotenz größer als auf der normalen Schmelzkurve (in Abb. 2 übertrieben gezeichnet). Das hat zur Folge, daß dabei eine unterkühlte, daher instabile, Schmelze entsteht, die wieder irreversibel in die feste Phase unter dem Druck P_2 übergehen kann. Der ganze Vorgang ist nur möglich, wenn es sich um einen lokalen Druck P_1 auf den Festkörper handelt, so daß die Schmelze unter dem kleineren Druck P_2 abfließen und wieder erstarren kann. Derselbe Effekt würde natürlich einfach durch eine plastische Deformation des Festkörpers erreicht werden, so daß er gewissermaßen dem Druck P_1 zum Druck P_2 ausweicht. Es besteht aber ein wesentlicher thermodynamischer Unterschied zwischen beiden Vorgängen. Die genannte plastische Verformung ist thermodynamisch immer erlaubt, solange nur P_1 größer ist als P_2 . Erfolgt die Umwandlung jedoch unter Zwischenschaltung einer unterkühlten Schmelze, dann existiert eine Beschränkung durch die heterobare Schmelzkurve.

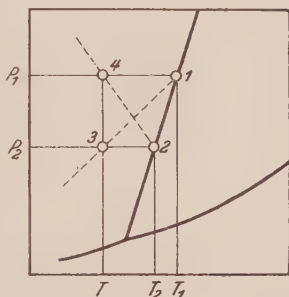


Abb. 2. Schematisches Phasendiagramm eines Einstoffsystems. — isobare Phasengrenzlinien, - - - heterobare Umwandlungskurven. 1.....4 Schmelzkurve; flüssige Phase unter konstantem Druck P_2 . 1.....3 Erstarrungskurve; feste Phase unter konstantem Druck P_1 . (Die Neigung der Kurven ist stark übertrieben.)

Die thermodynamische Möglichkeit eines Vorganges bedingt bekanntlich noch nicht, daß dieser in einem bestimmten Fall auch tatsächlich vor sich geht. Man darf daher wohl überlegen, unter welchen Bedingungen man die vorübergehende Bildung einer Schmelze aus einem Festkörper unter lokalem Druck erwarten könnte. Hier liegt es nun nahe, einen Zusammenhang mit den sogenannten Regelationserscheinungen, die man beim Eis beobachten kann, zu sehen. Hierher gehören Erscheinungen wie das Fließen der Gletscher, das Gleiten von Schlittschuhen auf dem Eis, das Zusammenfrieren beim Pressen eines Schneeballs und anderes. Man erklärt diese Erscheinungen meist durch die Anomalie des Wassers, die bewirkt, daß der Schmelzpunkt mit dem Druck sinkt. Dieser Effekt ist allerdings so klein, daß er wohl schwerlich zur alleinigen Erklärung ausreicht. Es wäre denkbar, daß es sich dabei um einen heterobaren Schmelzvorgang handelt. Dann müßte man aber Regelationserscheinungen auch an anderen Stoffen beobachten können, bei denen der normale Schmelzpunkt mit dem Druck steigt. Hier könnte man an eine Analogie dazu in der Verfestigung beim Pressen von Pastillen und beim Sintern von Metallpulvern denken.

Für ein echtes Gleichgewicht zwischen zwei Phasen ist es notwendig, daß beide denselben Dampfdruck besitzen. Der Beweis für heterobare Gleichgewichte kann analog wie früher so leicht erbracht werden, daß auf seine Wiedergabe verzichtet werden kann. Aus der Gleichheit der Dampfdrucke (und damit der Aktivitäten) folgt gleichzeitig die Widerspruchsfreiheit der Berechnung eines heterobaren Gleichgewichts. In Abb. 2 kann man sich z. B. das Gleichgewicht zwischen festem Druck P_1 und flüssig beim Druck P_2 auf zwei Wegen erreicht denken.

Entweder gehen wir vom Schmelzpunkt beim Druck P_2 (Punkt 2) aus und erhöhen den Druck der festen Phase auf P_1 , womit sich das Gleichgewicht zum Punkt 4 verschiebt, oder wir gehen von Punkt 1 aus und senken den Druck über der Flüssigkeit auf P_2 , wodurch wir auf der Erstarrungskurve zu Punkt 3 gelangen, der dasselbe Gleichgewicht wie Punkt 4 bezeichnet und bei derselben Temperatur liegen muß.

Eine Differentialgleichung für die Fermischen Streulängen bei der Streuung Neutron-Proton.

(Kurze Mitteilung.)

Von

Theodor Sexl.

Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

(Eingelangt am 25. November 1952.)

Es wird eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die FERMISCHEN Streulängen hergeleitet, die es ermöglicht, die fraglichen Streulängen durch eine, ev. numerische Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung zu bestimmen. Für den Spezialfall der Potentialmulde ist diese für $l=0$ exakt lösbar. Das Ergebnis ist in Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen des Verfassers.

In seiner Arbeit „Eine Differentialgleichung für die Phase bei der Streuung Neutron-Proton“ hat O. BERGMANN¹ folgende Differentialgleichung für die Phase δ_l bei der Streuung der l -ten Partialwelle eines Neutrons an einem Proton aufgestellt:

$$\frac{d\delta_l(r)}{dr} = -\frac{8\pi^2\mu}{h^2} \frac{V(r)}{k} \frac{1}{4} \left\{ e^{i\delta_l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r H_{l+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) + e^{-i\delta_l} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r H_{l+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right\}^2.$$

Durch Einführung der BESSELSCHEN und NEUMANN'SCHEN Funktionen an Stelle der HANKEL'SCHEN kann diese umgeschrieben werden in

$$\frac{d\delta_l(r)}{dr} = -\frac{8\pi^2\mu}{h^2} \frac{V(r)}{k} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \cdot \cos \delta_l - \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r N_{l+\frac{1}{2}}(kr) \cdot \sin \delta_l \right\}^2.$$

Aus dieser Differentialgleichung für die Phasen δ_l kann nun leicht eine Differentialgleichung für die FERMISCHEN Streulängen hergeleitet

¹ O. BERGMANN, Acta Phys. Austr. 4, 62 (1950).

werden, wenn man frühere Ergebnisse des Verfassers² benützt, nach denen sich die FERMISCHE Streulänge der l -ten Partialwelle als Grenzwert in der Form darstellt

$$a_l = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l}.$$

Geht man zunächst mit $k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l = a^{-1}$ in die Differentialgleichung ein, so wird

$$\begin{aligned} \frac{da(r)}{dr} = \frac{8\pi^2\mu}{\hbar^2} V(r) & \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r J_{l+\frac{1}{2}}(kr) \cdot \frac{1}{k^{l+1}} - \right. \\ & \left. - \sqrt{\frac{\pi}{2}} k r N_{l+\frac{1}{2}}(kr) \cdot k^l a(r) \right\}^2. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich sofort für den Grenzfall $k \rightarrow 0$ die gesuchte Differentialgleichung

$$\boxed{\frac{da_l(r)}{dr} = \frac{8\pi^2\mu}{\hbar^2} V(r) \frac{\pi}{2^{2l+2} \Gamma^2(l+3/2)} \left\{ -r^{l+1} + \frac{2l+1}{2^{2l}} \left(\frac{(2l)!}{l!} \right)^2 r^{-l} a_l \right\}^2}$$

unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \sqrt{k r} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kr)^{2n+l+1}}{2^{2n+l+\frac{1}{2}} n! \Gamma(l+1/2+n+1)}, \\ \sqrt{k r} N_{l+\frac{1}{2}}(kr) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+l+1} (kr)^{2n-l}}{2^{2n-l-\frac{1}{2}} n! \Gamma(-l-1/2+n+1)}. \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $l=0$ folgt

$$\frac{da_0(r)}{dr} = \frac{8\pi^2\mu}{\hbar^2} V(r) (a_0 - r)^2$$

als Differentialgleichung für die übliche FERMISCHE Streulänge a_0 bei der Streuung der nullten Partialwelle.

$$\text{Für eine Potentialmulde: } V \begin{cases} -V_0 & \text{für } r < r_0 \\ 0 & \text{für } r > r_0 \end{cases}$$

wird

$$\frac{da_0}{dr} = - \frac{8\pi^2\mu}{\hbar^2} V_0 (a_0 - r)^2.$$

Die Substitution $a_0 - r = y$ führt zu dem Integral

$$a_0 = r - \frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi^2\mu}{\hbar^2} V_0}} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{8\pi^2\mu}{\hbar^2} V_0} \cdot r \right).$$

² Th. SEXL, ebenda 5, 336 (1952); 6, 30 (1952); Th. SEXL und Herbert ÜBERALL, Z. Physik 132, 72 (1952).

was mit dem nach anderen Methoden erhaltenen Ergebnis übereinstimmt ($a_0 = \lim_{r \rightarrow r_0} a_0(r)$).

Anmerkung. Die von O. BERGMANN aufgestellte, oben angegebene Differentialgleichung für die Phase δ_l bei der Streuung Neutron-Proton gilt rein mathematisch für eine Wellengleichung von der Form

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \psi(r) = \frac{8\pi^2\mu}{h^2} V(r) \psi(r).$$

Bei der Streuung Proton-Proton, respektive allgemeiner bei Vorhandensein eines COULOMBSchen neben einem Zentrifugalpotential liegt mathematisch die Wellengleichung vor

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + k^2 - \varrho(r) \right) \psi(r) = \frac{8\pi^2\mu}{h^2} V(r) \psi(r).$$

Durch Verallgemeinerung der BERGMANNschen Überlegungen zeigt man leicht, daß für die Phase eines solchen Streuproblems die Differentialgleichung gilt

$$\frac{d\delta(r)}{dr} = -\frac{8\pi^2\mu}{h^2} \frac{V(r)}{k} \{L_1(r) \cos \delta + L_2(r) \sin \delta\}^2,$$

wenn L_1 und L_2 die Lösungen der homogenen linken Seite der zuletzt angeschriebenen Wellengleichung bedeuten. Dies geht für $\varrho = 0$ in das bekannte Resultat über

$$\frac{d\delta(r)}{dr} = -\frac{8\pi^2\mu}{h^2} \frac{V(r)}{k} \sin^2(kr + \delta)$$

(vgl. z. B. R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik; Berlin, J. Springer, 1. Band, 2. Aufl., S. 285 ff.).

Bericht über die Jahrestagung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. bis 4. Oktober 1952 in Wien.

Zusammengestellt von

A. Smekal, Graz.

Die Herbsttagung vom 2. bis 4. Oktober 1952, zu der die Österreichische Physikalische Gesellschaft nach Wien eingeladen hatte, war die erste Vortragstagung seit der Gründung der Gesellschaft in Graz zum 13. Dezember 1950, dem 80. Geburtstage von HANS BENNDORF (1), und der Jahresversammlung in Graz vom 27. Oktober 1951 (2). Der Mitgliederstand der Gesellschaft hat in dieser Zeit die Anzahl von 112 erreicht, darunter 21 außerordentliche Mitglieder.

Die Wiener Herbsttagung wurde durch den stellvertretenden Vorsitzenden Prof. L. FLAMM sowie seine Mitarbeiter vorbereitet und ist von der Chemisch-Physikalischen Gesellschaft in Wien durch deren Präsidentin, Frau Prof. B. KARLIK, und ihren Schriftführer, Dozent Dr. K. LINTNER, wirksam unterstützt worden. Diesem Zusammenwirken ist auch zu danken, daß der Vortrag von Prof. Dr. J. EGGERT (Zürich), der durch Unterstützung des „Notringes der wissenschaftlichen Verbände Österreichs“ ermöglicht wurde, als gemeinsame Veranstaltung innerhalb des Tagungsprogrammes stattfinden konnte. Die Mitglieder der Chemisch-physikalischen Gesellschaft hatten ebenso wie die Studierenden der Hochschulen freien Zutritt zu den Veranstaltungen. Infolgedessen betrug die Anzahl der Tagungsteilnehmer etwa 250, darunter 30 Besucher aus Graz sowie Vertreter aus Leoben und Innsbruck. Die Sitzungen fanden im großen Hörsaal des I. Physikalischen Institutes der Universität statt, den Prof. E. SCHMID entgegenkommenderweise zur Verfügung gestellt hatte.

Für die Tagung waren außer dem Vortrag von J. EGGERT (Zürich) drei zusammenfassende Berichte von L. FLAMM, H. MACHE und A. SMEKAL, sowie eine Filmvorführung von F. SEIDL vorgesehen und insgesamt 47 Einzelvorträge angemeldet worden. Die zu diesen Vorträgen eingegangenen Inhaltsangaben der Vortragenden waren von K. W. F. KOHLRAUSCH als Vorbericht zusammengestellt und bereits in den Acta Physica Austriaca abgedruckt worden (3), so daß den Tagungsteilnehmern durch das Entgegenkommen von Herrn LANGE vom SPRINGER-Verlag in Wien, Sonderdrucke davon zur Verfügung gestellt

werden konnten. Am Vorabend der Tagung fand im Rathauskeller ein sehr gut besuchter Begrüßungsabend statt.

Die Tagung wurde am 2. Oktober 1952, 9 Uhr vormittags, durch den Vorsitzenden, Prof. K. W. F. KOHLRAUSCH, eröffnet, der in seiner Begrüßungsansprache Herrn Bundesminister für Unterricht Dr. KOLB und Herrn Sektionsrat Dr. DRIMMEL sowie die übrigen Ehrengäste und Teilnehmer willkommen hieß. Der Verband der deutschen Physikalischen Gesellschaften hatte als besonderen Vertreter Herrn Prof. K. BECHERT (Mainz) entsendet. Während des abgelaufenen Jahres verlor die österreichische Physik durch den Tod Prof. Dr. Felix EHRENFELDT, dessen der Vorsitzende in einem besonderen Nachruf gedachte.

Die Jahreshauptversammlung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft fand am 3. Oktober 1952 um 15 Uhr nachmittags statt, wobei der Tätigkeitsbericht des Vorsitzenden zur Kenntnis genommen und der Geschäftsführung auf Grund des Ergebnisses der Rechnungsprüfung Entlastung erteilt wurde. Ein vom Vorsitzenden Dr. KARL WOLF (Ludwigshafen/Rh.) des Verbandes der deutschen Physikalischen Gesellschaften eingegangenes Telegramm enthielt die Mitteilung, daß die vom Vorstände der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft an den Verband gerichtete Einladung zur Veranstaltung einer gemeinsamen Physikertagung in Innsbruck im Herbst 1953 freudigst begrüßt und die Abhaltung der Tagung durch die Mitgliederversammlung des Verbandes in Berlin am 28. September 1952 beschlossen wurde. Daher soll auch die nächste Jahreshauptversammlung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft in Innsbruck abgehalten werden (4).

Zum allgemeinen Bedauern hatten der bisherige Vorsitzende, K. W. F. KOHLRAUSCH, und sein Stellvertreter, L. FLAMM, eine Wiederwahl abgelehnt, so daß der Vorstand neu gewählt werden mußte. Hierbei wurden für die nächsten beiden Geschäftsjahre A. SMEKAL (Graz) zum Vorsitzenden, R. STEINMAURER (Innsbruck) zum stellvertretenden Vorsitzenden, und J. WAGNER (Graz) zum Geschäftsführer der Gesellschaft gewählt, ferner L. DOMORAZEK (Graz), B. KARLIK (Wien), E. SCHMID (Wien) und F. TREY (Leoben) zu Beisitzern sowie A. SZÉKELY (Graz) und W. GLASER (Wien) zu Rechnungsprüfern. Zur Beratung aller mit dem physikalischen Unterricht an den österreichischen Mittelschulen zusammenhängenden Fragen wurde ein Ausschuß berufen, dem F. SEIDL (Wien) als Vorsitzende sowie H. MANLIK (Wien), L. DOMORAZEK (Graz), E. WEINMEISTER (Graz) und P. P. PRAXMARER (Innsbruck) als Mitglieder angehören. Dem scheidenden Vorstände sprach A. SMEKAL den Dank der Gesellschaft aus.

Die anschließende Autobusfahrt vereinigte zahlreiche Teilnehmer und ihre Angehörigen bei sonnigem Herbstwetter auf dem Kahlenberge.

Die in den Vortragssitzungen gehaltenen Vorträge folgten zumeist der Programmareihenfolge. Durch Behinderung oder Abwesenheit der Redner entfielen der zusammenfassende Bericht von H. MACHE (Wien) und die Vorträge von A. SZÉKELY (Graz), J. KOLB (Innsbruck),

K. M. KOCH (Wien), H. REUTER (Wien). Als neue Vorträge wurden eingefügt: O. RANG und F. SCHLEICH (Mosbach/Baden), Die Identifizierung kleiner Kristalle im Elektronenmikroskop mit Hilfe der Dunkelfeldmikroskopie (vorgetragen von F. SCHLEICH), sowie E. WEINMEISTER (Graz), Über aktuelle Fragen des physikalischen Unterrichtes. An Stelle ihres angekündigten Vortrages veranstaltete Frau Prof. B. KARLIK am 4. Oktober 1952 nachmittags nach Abschluß der Vorträge Führungen durch das von ihr geleitete Institut für Radiumforschung der Österreichischen Akademie der Wissenschaften. Die genaue Reihenfolge der Vorträge und die Namen der Fachgenossen, die sich als Vorsitzende für die Vortragssitzungen zur Verfügung gestellt hatten, sowie Kurzreferate der Vorträge sind in den „Physikalischen Verhandlungen“ 1952 veröffentlicht (5).

Literatur.

- (1) Vgl. Acta Phys. Austr. Bd. IV, 1951, Heft 4, S. 497—508.
- (2) Acta Phys. Austr. Bd. V, 1951, Heft 3, S. 418.
- (3) Acta Phys. Austr. Bd. VI, 1952, Heft 2—3, S. 219.
- (4) Die Innsbrucker Physikertagung wird voraussichtlich vom 19. bis 24. September 1953 stattfinden, die Jahreshauptversammlung der Österreichischen Physikalischen Gesellschaft daselbst am 22. September 1953.
- (5) „Physikertagung in Wien“, Phys. Verh., Band 3, 1952, 5. Lieferung, S. 219—241. Physik Verlag, Mosbach/Baden.

Buchbesprechungen.

Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie. Von PASCUAL JORDAN. („Die Wissenschaft.“ Herausgegeben von W. Westphal: Band 107.) Mit 4 Textabb., VIII 207 S. Braunschweig: F. Vieweg & Sohn. 1952.

Die jüngsten Untersuchungen über Kosmologie und projektive Relativitätstheorie finden in dem eben erschienenen Werk eine kritische Zusammenfassung. Gerade PASCUAL JORDAN hat zu dieser Disziplin bemerkenswerte Beiträge geleistet, die auch für die zukünftige Entwicklung eine entscheidende Rolle spielen werden. Seine äußerst klare und dabei exakte Art kommt dem Werk sehr zu-statten. Das Buch ist in zwei Teile gegliedert. Der erste Teil behandelt die RIEMANN-EINSTEINSche Theorie und geht von der Geometrie aus. Die allgemein bekannten und längst in den Vorlesungsstoff eingegangenen Betrachtungen werden durch neue Überlegungen reizvoll gestaltet und bereiten dem Leser einen großen Genuß, selbst wenn er schon die verschiedenen Standarddarstellungen von LAUE, WEYL etc. gelesen hat. Die Hinweise auf die Darstellungstheorie und den RIEMANNschen Krümmungstensor müssen ganz besonders hervorgehoben werden. Das zweite Kapitel des ersten Buches ist der Gravitation gewidmet. Es beginnt mit einer Wiederholung der speziellen Relativitätstheorie, deren allgemeine Kenntnis vorausgesetzt wird und behandelt dann die EINSTEINSche Feldgleichung, sowohl für den Vakuumfall, als auch für den Fall des MAXWELL-Feldes und Materiefeldes. Zahlreiche Beispiele, die aus der Literatur gewählt wurden, erläutern die tiefen Betrachtungsweisen vortrefflich. Der relativistischen Kausalität wurde ein besonders eingehender Abschnitt gewidmet. Das erste Buch schließt mit einer Zusammenstellung der kosmologischen Modelle, unter Herausarbeitung ihrer wichtigsten Eigenschaften und Vorzüge. Im zweiten Buch, das der erweiterten Gravitationstheorie gewidmet ist, finden wir zuerst im Kapitel III die projektive Relativitätstheorie. Hier werden die Gedankengänge von KALUZA, O. KLEIN, VEULEN und anderen Verfassern einer tiefen mathematischen Analyse unterzogen und die EINSTEINSche sowie die EINSTEIN-MAXWELLSche Theorie kritisiert. Auf Grund dieser Betrachtungen kommt der Autor zum Schluß, daß „die Gravitationskonstante in Wahrheit eine Veränderliche ist, eine skalare Feldgröße“, also, welche Auffassung den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen bildet. Im vierten und letzten Kapitel wird die erweiterte Theorie in vierdimensionaler Schreibweise erörtert. Wir finden hier wieder die kosmologischen Modelle und die empirischen Unterlagen, welche zu einer Beurteilung des Problems der Sternentstehung und Sternentwicklung herangezogen werden können. Theorie und Erfahrung in der Kosmologie werden sorgfältig herausgearbeitet und speziell die fünf verschiedenen Einwände gegen das lineare Modell einer strengen Kritik unterzogen. Am Schlusse sind alle empirischen Daten zusammengestellt, die eine Veränderlichkeit der Gravitationskonstante beleuchten. Ein sorgfältiges Schriftenverzeichnis, sowie ein Namenregister bilden den Abschluß des Werkes.

P. URBAN, Graz.

Cosmology. Von H. BONDI. (Cambridge Monographs on Physics. Herausgegeben von N. Feather, D. Shoenberg und G. K. Batchelor.) Mit 6 Textabb., XI, 179 S. Cambridge: At the University Press. 1952. Geb. 22 s. 6 d. net.

Noch vor zwanzig Jahren galt die Beschäftigung mit kosmologischen Fragen als gänzlich spekulativ und ohne Nutzen für den Fortschritt der reinen Wissenschaft. Diese Einstellung der wissenschaftlichen Welt hat aber in jüngster Zeit einem lebhaften Interesse breiter wissenschaftlicher Kreise für die Kosmologie Platz gemacht. Man scheute nicht nur große Kosten (die größten astronomischen Teleskope dienen zum großen Teil der kosmologischen Forschung), sondern auch die erfahrensten Theoretiker aus Physik und Astronomie beschenkten die wissenschaftliche Welt mit einer Anzahl neuer überraschender kosmologischer Theorien. Vom Autor selbst stammt im Verein mit T. GOLD die sogenannte stationäre Theorie des Kosmos. Im Gegensatz zu den Erfahrungen, die man mit vielen anderen Monographien über die verschiedensten Gebiete machen muß, deren Autoren durch die eigenen Arbeiten verführt, eine zu einseitige Darstellung zu geben pflegen, besitzen wir nun in diesem Buch eine ganz ausgezeichnete Zusammenfassung des Gesamtgebietes der Kosmologie nach dem heutigen Stande. Bei der Darstellung dieser schwierigen Materie gefiel dem Rezensenten außer dem klaren Stil und der didaktisch sehr günstigen Anordnung des Stoffes vor allem die für einen Theoretiker doppelt verdienstvolle Unterstreichung der Erfahrungsgrundlagen. Das Werk erfordert zu seinem Studium nur die Bekanntschaft mit den Grundlagen der Astronomie und der Relativitätstheorie und ist deshalb auch für den mathematisch gebildeten Laien hervorragend geeignet. Ein ausführliches Literaturverzeichnis (bis einschließlich 1950) ermöglicht dem Interessenten ein tieferes Eindringen in die besprochenen Theorien und deren Grundlagen.

G. WINKLER, Graz.

An Introduction to Mathematical Physics. Von R. A. HOUSTOUN. Mit Textabb., X, 262 S. London und Glasgow: Blackie & Son Limited. 1952. Geb. 25 s. net.

Das vorliegende Büchlein stellt eine erweiterte Auflage des, unter gleichem Titel schon 1912 erschienenen Buches dar und bringt eine kurze Einführung in die theoretische Physik. Es wird vor allem auf die wichtigsten Begriffsbildungen und Naturgesetze Rücksicht genommen, wobei experimentelle Details ebenfalls erwähnt werden. Einige eingestreute Aufgaben dienen zur Vertiefung des Stoffes und sollen das Vorgetragene erläutern. Besonders zu erwähnen ist die klare Darstellung der Wärmeleitung, die auch gleichzeitig Gelegenheit gibt das Wichtigste der FOURIER-Analyse zu behandeln. Aber auch die Wellenbewegung, deren Wichtigkeit gerade für die moderne Physik eine besondere Bedeutung einnimmt, wird klar herausgearbeitet. Von der Quantentheorie muß die Statistik und die wichtigsten Erkenntnisse der BOHRschen Theorie erwähnt werden. Den Abschluß bildet ein Kapitel über die Minimalprinzipien und die Relativitätstheorie. Alles in allem verschafft das Studium des Buches einen guten Überblick über die modernen Betrachtungsweisen und stellt für die Studierenden einen wertvollen Ratgeber dar.

P. URBAN, Graz.

Fortsetzung von der II.-Umschlagseite

Tabellen: Die Übersichtlichkeit einer Tabelle und damit das Erreichen ihres Zweckes kann sehr gefördert werden durch Sorgfalt in der Wahl der Überschriften sowohl für die Tabelle als Ganzes als für die einzelnen Zeilen und Kolonnen. Die gewählten Einheiten müssen klar ersichtlich, die Abkürzungen verständlich sein.

Formeln: Der Setzer versteht im allgemeinen nichts vom Sinn der Formeln und hält sich genau an die Vorlage. Korrekturen an gesetzten Formeln bedingen einen unverhältnismäßig großen Aufwand an Mehrarbeit. Unverhältnismäßig in bezug auf die geringe Mehrarbeit, die der Verfasser hat, wenn er Buchstaben und Formelzeichen deutlich und unmißverständlich schreibt, bzw. malt. — Die Formelzeichen sollen womöglich den AEF-Normen entsprechen oder den in den beiden Handbüchern der Physik verwendeten Zeichen angeglichen sein. — Längere mathematische Ableitungen sollen gegebenenfalls in einem mathematischen Anhang zusammengestellt werden; soweit gekürzt, daß der Fachmann den Rechengang übersehen und eventuell kontrollieren kann. Im Text ist raumsparende Schreibweise anzu-

wenden, also $(a + b)/c$ statt $\frac{a+b}{c}$ oder $e^{-E/kT}$ statt $e^{\frac{-E}{kT}}$.

Zitate ebenso wie Anmerkungen werden als Fußnoten mit durch die Arbeit fortlaufender Numerierung (zur Erleichterung der Rückverweisung, bzw. zur Vermeidung unnötiger Wiederholungen) gebracht. Als Zitatmuster (vergleiche die Handbücher oder die S.-B. der Akademie): A. J. DEMPSTER, Nature 136, 180 (1935). Um Einheitlichkeit in den Abkürzungen der Zeitschriftenzitate zu erreichen, ist die Herausgabe eines Verzeichnisses geplant.

Korrekturen: Grundsatz muß angesichts der schwierigen Verhältnisse in der ganzen Drucklegung sein, daß sich der Autor, der seine Abhandlung veröffentlicht sehen will, stillschweigend verpflichtet, ebensoviel Sorgfalt, wie er für Literaturstudium, Rechnungen, Beobachtungen aufwendet, auch für die Niederschrift seiner Ergebnisse und die anschließende Korrekturarbeit aufzubringen; auch dann, wenn er seine Interessen bereits wieder anderen Problemen zugewendet hat.

Herausgeber, Schriftleitung und Verlag

Bei der Schriftleitung sind folgende Beiträge eingelangt:

(Änderungen in der Reihenfolge bei der Veröffentlichung müssen aus technischen Gründen vorbehalten bleiben.)

- Hinteregger, H.** Induktionserscheinungen bei Bewegung von Materie in primären Magnetfeldern und ihre experimentellen Anwendungsmöglichkeiten. I: Experimentelle Grundlagen. II: Translationsfälle. III: Theoretische Grundlagen für die Erfassung der allgemeineren Fälle 10. X. 1951
- Überall, H.** Der Photoeffekt im homogenen elektrischen Feld 5. IX. 1952
- Überall, H. und F. Schlesinger.** Der Quadrupolübergang beim Kernphotoeffekt am Deuteron 6. IX. 1952
- Florian, A. und P. Urban.** Zur Erzeugung von Mesonen beim Durchgang durch Materie 20. IX. 1952
- Haefer, R.** Die Zündspannung von Gasentladungen unter dem Einfluß eines transversalen Magnetfeldes im Druckbereich von 10 bis 10^{-8} Torr 27. X. 1952
- Theimer, O.** Intensitätsprobleme beim RAMAN-Effekt 1. Ordnung 27. X. 1952
- Eder, G.** Spin-Bahn-Kopplung nach der pseudoskalaren Theorie 27. X. 1952
- Baumann, K.** Eine einfache Herleitung der Streuformel von BHABHA 27. X. 1952
- Baumann, K.** Zur Definition der relativistischen Teilchen-Antiteilchen-Wellenfunktion 27. X. 1952
- Hittmair, O.** Die Geometrie der Winkelverteilung von Kernreaktionen 27. X. 1952
- Smekal, A. G.** Dynamik des spröden Zugbruches von zylindrischen Glasstäben 3. XI. 1952
- Roesler, F. C.** Zur Magnetophotophorese 3. XI. 1952
- Lihl, F.** Die Koerzitivkraft von Feinstpulver-Preßmagneten auf der Basis Eisen-Kobalt 18. XI. 1952

- Preining, O.** Untersuchungen über Magnetophotophorese an zerstäubtem Silberstahl 3. XII. 1952
- Saller, H.** Die zehn allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen in der Mechanik der speziellen Relativitätstheorie . . 5. XII. 1952
- Donnert, H.** Ableitung mathematisch äquivalenter Tensorgleichungen aus den DIRACSchen Spinorgleichungen für das Wellenfeld von Elementarteilchen nicht verschwindender Masse und beliebiger ganzer Spinquantenzahl 20. XII. 1952

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N I

Soeben erschienen:

Technische Elektrodynamik

Von

Franz Ollendorff

Dr.-Ing., Dipl.-Ing., Professor der Elektrotechnik und Vorstand des Elektrotechnischen Laboratoriums der Hebräischen Technischen Hochschule Haifa, Mitglied des wissenschaftlichen Forschungsrates für Israel

Erster Band:

Berechnung magnetischer Felder

Mit 287 Textabbildungen. X, 432 Seiten. Lex.-8°. 1952

Ganzleinen S 330.—, DM 66.—, \$ 15.70, sfr. 67.50

Das Buch setzt die Kenntnis der theoretischen Grundlagen des Gebietes, vor allem der FARADAY-MAXWELLSchen Feldtheorie, voraus. Davon ausgehend behandelt der Verfasser die mannigfachsten, besonders den Konstrukteur interessierenden Fragen, wobei sowohl die technische Bedeutung der einzelnen Probleme als auch die Systematik des jeweils anzuwendenden Lösungsganges eingehend berücksichtigt werden. Die Feldberechnungen von Synchron- und Asynchronmaschinen, die Streuungstheorie der Autotransformatoren, die Ermittlung der Zugkräfte von Spaltpolsystemen, Spannplatten und magnetischen Abscheidern sowie die Ansätze zur quantitativen Beschreibung gewisser Meßwerke, die zu einem wesentlichen Teil hier erstmalig behandelt werden, demonstrieren die Leistungsfähigkeit der rechnerischen Methoden. Als analytische Hilfsmittel wurden grundsätzlich nur solche Funktionen eingeführt, deren Zahlenwerte durch Tabellenwerke leicht zugänglich sind.

Das Gesamtwerk wird etwa 6 Bände umfassen. Als nächster Band wird erscheinen: „Innere Elektronik“, Teil 1: Elektronik des Einzelelektrons; Teil 2: Elektronik von Kollektiven. Jeder Band ist in sich abgeschlossen und einzeln käuflich.

Soeben erschienen:

Grundlagen der Elektronenoptik

Von

Dr. Walter Glaser

o. Professor an der Technischen Hochschule Wien

Mit 445 Textabbildungen. X, 699 Seiten. Lex.-8°. 1952

Ganzleinen S 600.—, DM 120.—, \$ 28.60, sfr. 124.—

Das Buch vermittelt in lehrbuchmäßiger Darstellung die theoretischen Grundlagen der Elektronenoptik. Obwohl keine besonderen Kenntnisse des Lesers vorausgesetzt werden, reicht das Buch bis zu den letzten Ergebnissen auf diesem Gebiet. Es kann daher in gleicher Weise dem Studenten als Einführung und dem Spezialisten als Nachschlagewerk dienen. Auch der selbständig Forschende wird verschiedene Anregungen finden.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung